SHUXUE JIAOYU XINLIXUE

数学教育心理学

曹才翰　章建跃　著

北京师范大学出版社

SHUXUE JIAOYU XINLIXUE

数学教育心理学

曹才翰 章建跃 著



北京师范大学出版社
·北 京·

图书在版编目（CIP）数据

数学教育心理学/曹才翰，章建跃著．—北京：北京师范大学出版社．1999.12

ISBN 7-303-05232-1

Ⅰ．数…　Ⅱ．①曹…　②章…　Ⅲ．数学-学科心理学

Ⅳ．G447

中国版本图书馆 CIP 数据核字（1999）第 72094 号

北京师范大学出版社出版发行

（北京新街口外大街 19 号　邮政编码：100875）

出版人：常汝吉

北京师范大学印刷厂印刷　　全国新华书店经销

开本：850 mm×1 168 mm　1/32　印张：9.5　字数：234 千字

1999 年 12 月第 1 版　2000 年 6 月第 2 次印刷

印数：2 001～5 000　定价：12.00 元

前　　言

教育心理学是兼有教育学与心理学两种特征的一门学科。因此，教育心理学研究既要考虑到学校教育的实际需要，又要与基础心理学理论、方法的发展同步。

众所周知，学校教育的主要特点是在有意设置的情景中对学生进行有计划的教育，使学生的身心和行为获得良好发展，其目的是要把学生培养成为“四有”新人。而基础心理学的主要特征则是采用自然科学的方法研究个体或群体的行为变化，从行为变化中发现规律，从而建构起能够解释同类行为现象的理论。基础心理学研究的对象虽然也是人的行为，但是如何对学生进行有目的、有意识的教育，以使他们形成高尚的理想和道德、良好的行为规范、较强的社会适应能力等，却不在其研究范围之内。于是，建立学校教育和心理学联系的任务就落在教育心理学的肩上，而建立这种联系并进而形成独立的学科体系，就成了教育心理学发展的中心课题。

就以往的教育心理学研究实践而言，主导性的取向是直接应用心理学的原理和方法解决教育问题，由于没有对学校教育这一特殊背景给予关注，因而使教育心理学未能在学校教育中发挥应有的作用。教育心理学家在反思的基础上，对今后的研究取向作了调整，明确地提出：教育心理学的研究应当为达到学校教育目的服务，应能帮助教师解决教学中出现的实际问题；教育心理学应把学生作为一个完整的人来研究，并要以研究所获得的关于学

生身心发展和个体差异的认识为依据进行教学设计；在研究方法上，教育心理学除了采用以假设演绎为取向的量的研究以了解问题性质以外，还应特别注意采用以经验归纳为取向的质的研究，这样才能解决现实教育中的实际问题。

数学教育心理学是一门以学校数学教育为背景，对数学的教与学中的各种心理现象及其规律进行研究的学科。作为以数学为特殊背景的教育心理学，数学教育心理学研究应当为实现学校数学教育目的服务，为教师解决数学教学过程中的各种问题提供理论依据；应当对学生的数学学习从认知和情感两个方面作全方位的研究；在研究方法上则应定量与定性相结合，并要特别注意以定量数据为依据的定性分析。与数学、心理学乃至教育心理学相比，数学教育心理学是非常年轻的。正因为年轻，她的地位问题目前尚有许多争议；也正因为年轻，她的对象、研究方法以及评价其成果成效性的标准等都不统一。按照我们的理解，数学教育心理学是一门独立的学科，与数学教学相关的各种问题都是她的研究对象。例如，在数学学习心理方面，数学思维及其发展、数学智力和能力、数学学习的性质、数学学习的过程、数学学习迁移、数学学习动机、数学学习中的非认知因素等都是数学教育心理学的研究课题；在数学教学心理方面，数学教学设计、数学教学策略、数学教学环境、数学教学评价等也是数学教育心理学研究的课题。

本书作为数学教育心理学研究的一个片断，在介绍当前数学教育研究的几个热点问题以后，以数学学习过程为线索，从认知角度对数学概念的学与教、数学知识的学与教、数学技能的获得等数学教育心理学的最基本问题进行了探讨，并在此基础上，对数学课堂教学改革中的若干问题提出了初步意见。

我们的研究尚属起步阶段，还不成系统，书中肯定存在许多缺点和错误，恳切期望得到读者的批评指正。

绪 论

建立数学教育心理学学科体系的若干思考

作为一名合格的数学教师，其必须具备的条件是多方面的，而其中最主要的（也是公认不可缺少的）有三条：首先，必须有比较扎实的数学知识，"正如要给学生一杯水，自己需有一桶水"，中学数学教师必须具有数学大学本科毕业的水平，这样才能很好的驾驭中学数学教材，使他们对中学数学知识的来龙去脉做到心中有数，对有关知识的地位和作用能准确把握，对中学数学知识中的数学思想、数学方法能运用自如；第二，必须懂得教学方法，知道如何才能使学生较好掌握教学大纲中规定的数学知识，这就需要他们懂得如何驾驭课堂教学，而要有效地驾驭数学课堂教学，又要了解学生的数学学习心理过程，并且知道怎样才能使学生更加喜欢数学，从而更愿意努力地去学习数学；第三，必须热爱教师这一工作，具有良好的敬业精神，有强烈的责任心。唯有这样，他们才能将中学数学教学工作当成一项事业，自觉地钻研其中的规律，努力使自己成为一个"学者型"的数学教师。

事实上，"教学"二字包含了教师"教"和学生"学"的双边活动，是教师与学生之间的心理相互作用的过程。当前，对于一个数学教师来说，自觉主动地去理解和掌握学生的数学学习的心理过程，并在此基础上，研究和把握教学过程中教与学相互作用的基本规律，已经成为他搞好数学教学的先决条件，否则他将面临被淘汰的危险。数学教育心理学是一门用科学的研究方法揭示

数学学科的教与学相互作用过程之基本规律的科学，因此应该成为数学教师培训的主要必修课程。学习和研究数学教育心理学是成为一名合格的数学教师的重要途径。

一 数学教育心理学的性质

数学教育心理学是在教育心理学发展和完善的基础上，结合数学学科及其教学的特点而发展起来的一门边缘学科。这是一门处于发展过程中的学科。国际上，真正具备数学学科特点的、系统的、能被数学教育界普遍接受的数学教育心理学学科体系还没有建立起来。与国际数学教育心理学的发展相比，我国的数学教育心理学只能说还处于初创阶段。

数学教育心理学必须要有自己的理论、问题、研究方法以及研究技术，这样才能成为一门独立的学科。越来越多的数学教育研究工作者认识到，数学教育心理学的基本任务应该是为人们科学地理解数学学科的教学和学习过程提供依据，同时，还应为人们改进数学教学和数学学习提供方法。也就是说，研究学生的数学学习规律（如何学）和教师的数学教学规律（如何教），并根据这种规律发展促进数学学科的教与学的方法是数学教育心理学的两大基本任务。

二 建立数学教育心理学理论体系的几个问题

在建立数学教育心理学理论体系的过程中，如下几个问题是需要特别予以重视的。

（一）数学教育心理学研究的目的是为数学的教与学服务，也即我们应强调这一学科的应用性

从教育心理学的发展来看，其重要趋势之一是为学校教育服务。研究过程中，人们更加强调了人的社会本质，把人的学习放在环境、社会、文化、集体等背景中加以研究，被试的选择直接

以学生、教师为对象，将问题直接放在真实的学校课堂教学情境中进行研究。有人还提出应把教育心理学发展成为一门像工程学或医学一样的应用学科。作为学科教育心理学，数学教育心理学应该更加强调应用性。因此，我们应把重点放在研究数学学习的特点和规律，研究如何根据数学学习的规律进行有效的数学教学活动，研究教师诊断和解决学生数学学习困难的方法，研究学生在数学学习活动过程中的个性差异，研究激发学生的数学学习动机等问题上，并要为学生提供进行有效学习的策略，为教师提供进行有效教学的策略。

（二）*数学教育心理学应具有鲜明的数学学科特点*

长期以来，我国的数学教育心理学研究比较多地侧重应用教育心理学的理论来解释数学学习与教学中的各种现象。这些工作为奠定数学教育心理学理论体系打下了一定的基础，对数学教学具有较好的理论指导意义。但是，我们也不得不注意到，数学教育心理学研究仍然处于学习教育心理学一般理论阶段，有待进一步深化。

我们知道，教育心理学与数学教育心理学是一般与特殊的关系，因此，数学教育心理学理论研究必须接受教育心理学的理论指导。然而，数学的学习、教学有其自身内在的规律性，这种规律性是一般的教育心理学理论所无法涉及的。这些规律是在数学学科的教与学的实践过程中反映出来的，具有其本身的特殊性、深刻性，是无法从一般的教与学的理论中演绎出来的。比如，“为迁移而教”、“为概括而教”是教育心理学的著名论断，也是被广大数学教育工作者所普遍接受的。教育心理学中，关于迁移的理论各种各样，如形式训练说、相同要素说、概括说、泛化理论、转化理论、学习定势理论、认知迁移理论，等等，这些理论从不同角度对学习的迁移问题进行了深入的探讨，但是，当把它们用于解释数学学习中的迁移现象时，总有令人不满意之处。例如，几

乎所有的迁移理论都强调一般原理、概括程度高的知识的迁移效果，然而，在数学学习中，学生学会了某个公式、定理（属于一般原理，概括程度高），特别是数学思想方法后，在应用的过程中，并不像迁移理论所期待的那样，出现大量的“正迁移”。究其原因，恐怕是数学中的特殊与一般、具体与抽象的表现形式与其他学科存在很大的差别，数学理论的抽象性确实比其他事物的抽象性要强得多，从而其适用范围也就广得多，这样，在解决具体问题时，数学知识、思想方法与具体问题之间的相互匹配就变得尤为重要并且难以把握，从而常常使学生感到相应的知识或思想方法难以发挥作用。事实上，正是由于数学的高度抽象性，使得数学的原理（公式、定理等）具有广泛的应用性，从而也使得数学方法具有很大的灵活性，这种灵活性便使得学生在解决具体问题时常常觉得可用的方法很多，但是真正用得上的方法很少。总之，数学教育心理学中，我们必须赋予迁移概念以反映数学学习特点的含义，而不能照搬或借用教育心理学的定义；教育心理学理论应用于数学教与学的实践，必须经过一个理论与实践之间的相互作用，并在此基础上进行重新概括，这样才能获得比较符合数学学科教与学特点的理论——数学教育心理学。因此，我们可以把数学教育心理学看成是一座联系教育心理学理论与数学教育实践的桥梁。

（三）注意对我国广大数学教师的数学课堂教学实践经验进行理论总结，换言之，广大数学教师的数学课堂教学实践经验是数学教育心理学理论的重要源泉

应该说，我国广大数学教师在他们的数学教学实践中创造了许多适合于他们自己实际的、具有鲜明特点的教学方法，获得了很好的教学效果。这些教学方法中，有的自觉地接受了教育学、心理学的理论指导，并且在实验的基础上进行了一定的理论总结，从而使相应的教改经验、教学方法具有一定的普遍意义；有的则是

包含了深刻理论的教学实践经验，只是教师们没有意识到这种理论内涵。在进行数学教育心理学的理论研究过程中，应特别注意从数学教师的数学教学实践经验中汲取营养。通过认真的分析、细致的研究，对这些实践经验进行抽象概括，以获得符合我国数学教学实际的理论体系。

这里涉及到如何看待和评价我国中小学数学教学的问题。现在有这样一种倾向，在基础教育中实施素质教育，数学教育为素质教育服务（或数学教育应当是素质教育），而我国过去的数学教育都是应试教育、“英才教育”，于是过去的一切都要否定，数学课程、数学教学方法等都要彻底改革，似乎不来一场数学教育革命便不能解决问题。我们认为，这种认识是片面的，是与我国的数学教育现状不相符合的。就整个基础教育来说，踏踏实实地搞好数学、语文、外语等几门主要课程的教学，提高学生的学习效率，使学生学得更轻松些、更主动些，这便是最好的素质教育。而就数学教学来说，让学生踏踏实实地学好数学知识，使学生具备较强的数学能力（包括应用数学知识解决实际问题的能力）和一定的创造精神，就是对素质教育的最大贡献。我国的数学教育确实存在许多问题，例如：数学教学内容陈旧，反映数学发展和社会发展要求的内容不够；数学教师凭经验进行教学的多，主动接受教育学、心理学理论指导的少；探索和研究数学课堂教学内在规律不够；轻视概念、原理的教学，只重结论不重过程，过渡学习运用不当，让学生进行大量的、重复性的机械练习；研究学生数学学习规律不够，不注意学生的个别差异；培养学生发现问题、提出问题的能力不够，培养学生解决实际问题的能力不够；只重视数学知识的传递，忽视数学能力的培养，忽视学生学习中的非智力因素，等等，这些都需要通过数学教育改革来加以解决。但是，这种改革不能采取革命式的，把过去的一切全部推倒重来的做法不一定能收到好的效果。我们应走一条渐变式的道路，继承

与发展并重。对中国的数学教育首先应该肯定成绩。中国学生的数学基础是扎实的，强调基础知识、基本技能是正确的，强调培养运算能力、逻辑思维能力、空间想象能力以及应用数学知识解决实际问题的能力也是正确的。值得指出的是，认知心理学家们越来越强调掌握基础知识的重要性，他们认为，任何学习总是在主体已有的认知结构的基础上进行的。无论一个人怎样聪明，如果他不具备某一领域内的知识，就不可能解决该领域内的问题。因此，当我们强调提高学生的素质，强调培养学生的能力，特别是培养应用数学知识解决实际问题的能力时，千万不能忘记基础知识、基本技能的重要性。我们应当客观地分析数学教育中存在问题的原因（社会环境的外部原因和数学教学的内部原因），寻找解决问题的办法，采取一种负责任的态度。

（四）注意运用科学的教育与心理研究的方法

在以往的数学教育心理学理论研究中，思辨性的研究比较多，直接利用教育心理学的理论成果对数学学科的学习与教学中的现象进行解释的工作比较多，以学校中数学的教与学为直接对象，通过对数学课堂学习与教学的观察、试验、实验，从而获得体现数学教育特点、反映数学课堂学习与教学客观规律的理论成果较少。这样，现行的各种数学教育理论在数学教学实践中得到应用和推广的程度将受到一定的限制。因此，我们应该改变数学教育心理学的研究思路，将理论研究与数学课堂教学紧密地结合起来，以扎实的实验为依托来进行理论研究，从实验中来提取理论，以逐步建立符合数学学习与教学实际的理论体系。这样，在研究过程中我们必须运用心理与教育的科学研究方法。事实上，心理与教育的研究发展到今天，从提出问题与假设、查阅研究文献、进行研究设计、收集数据资料到定性定量分析数据资料以及解释与呈现研究成果，已经形成一套比较完整的科学体系，对每个研究环节都有严格的操作规定，以确保结论的客观性、科学性。而这些

研究方法并没有在数学教育理论研究中被普遍采用。所以，在数学教育心理学的研究中应该认真地补上研究方法这一课，走实证性研究的路子，科学地设计实验，通过对观察、实验中获得的数据进行分析、统计处理后得出结论，做到言必有据。当然，实证性研究是一条艰苦的道路，需要我们付出更多的精力、体力，而且很可能在短期内难以取得成果。然而，唯有这样，才能使我们的理论符合数学教学的客观实际，经得起实践的检验，并能用来指导数学教学的实践。

特别值得一提的是心理学研究中的“生态化运动”，即强调在活生生的自然和社会生态环境下来研究被试的心理特点及其发展规律，坚持在教学实践中研究学生的心理及其发展，研究教育心理学。我们认为，数学教育心理学研究也应提倡深入到数学课堂教学实际中去，将学生放在数学课堂的环境中进行研究，从他们与数学课堂的相互作用中进行分析，进而揭示数学的教与学的客观规律。

（五）关于数学教育心理学研究中的哲学思想指导问题

众所周知，心理学是从哲学中分离出来的，它以 1879 年冯特创立世界上第一个心理学实验室，培养出大批一流心理学家为标志。而任何一种心理学流派，都有其鲜明的哲学思想基础。例如，格式塔心理学以现象学为哲学背景，认为心理学应以纯粹经验为对象，对之进行本质的观察和素朴而丰富的描写。这里，现象的经验是一个整体，不可分解为感觉元素，因为整体不等于部分之和。任何一个整体都有其特点的内在结构，主体通过认知重组把握这种结构和本质，产生顿悟，从而获得解决问题的方法。行为主义心理学的哲学基础则是实证主义，主张心理学的对象是可被观察的事件，因此，以华生为代表的行为主义者们，把意识排除在心理学研究之外。他们主张用纯粹自然科学的方法来研究有机体对刺激的反应，而研究的目的则是由刺激预测反应，以达到控

制行为的目的。新行为主义者斯金纳认为，“学习”即反应概率的变化；“理论”是对所观察到的事实的解释；“学习理论”所要做的，是指出引起反应概率变化的条件。他特别强调了“强化”的作用，认为如果一种反应之后伴随一种强化物，那么，类似环境里发生这种反应的概率就增加。由于行为主义心理学实际上是一种“没有心理的心理学”，因而必然与积累的大量经验事实和心理学发展的要求产生尖锐矛盾。这样，行为主义走向失败也就成为必然。作为反行为主义的认知心理学也就应运而生，并逐渐占据心理学的统治地位。认知心理学派中，有三种理论观点：一种是结构主义认知心理学，其代表人物是皮亚杰，其哲学基础是结构主义思潮。皮亚杰提出的发生认识论，其核心是关于主、客体相互作用的发展心理学，他认为，认识既不发端于客体，也不发端于主体，而是发端于联系主客体的动作（活动）之中，活动的特性就在于它是主客体的相互作用过程，客体作用于主体的同时，主体也作用于客体。通过这种相互作用，主体实现了对客体的适应。智慧的本质就是适应。第二种是信息加工的认知心理学，其哲学思想可追溯到古希腊时代的哲学家和思想家对记忆和思维这类认知过程的思索。它的兴起是对行为主义心理学放弃研究人的内部心理过程的严格环境决定论的不满和反抗的直接结果，而语言学研究的新发展、信息论、计算机科学的出现和迅速发展以及社会实际应用的需要等等，也为信息加工的认知心理学登上心理学的历史舞台并迅速成为主流创造了条件。信息加工的认知心理学家把人看成是计算机式的信息加工系统，用计算机的工作过程来模拟人的信息加工过程，对人的认知过程的内部心理机制，即信息的输入、储存、加工及输出等进行研究。他们强调人头脑中已有的知识和知识的结构对人的行为和当前的认知活动的决定性作用，认为各种认知活动之间是相互作用、有机地联系在一起的，是一个统一的整体。人的信息加工是靠产生式系统来实现的（关于

产生式系统，我们在后面将有专门论述）。第三种观点是心理主义的认知心理学。这种观点强调研究意识和揭示认知过程的内部心理机制，即信息是如何获得、储存、加工和使用的。

前苏联心理学以马克思主义哲学为指导思想，建立了独立于西方心理学的心理学体系。由于有了马克思主义的辩证唯物主义哲学思想的指导，前苏联心理学取得了非常巨大的成就，并且显示出越来越强的生命力，对当今世界心理学的发展产生了越来越大的影响。例如，由维果斯基、列昂节夫和鲁利亚共同创立的"文化历史发展理论"，即人的一切心理现象，"都应当从历史的观点，而不是抽象的观点，不是在社会环境之外，而是在同它的作用的不可分割的联系中，加以理解"的思想，越来越受到西方的重视。维果斯基认为，社会文化历史在人的心理发展上起到很大的作用，特别是活动和社会交往在人的高级心理机能发展中起了突出的作用。他认为，高级心理机能来源于外部动作的内化，这种内化不仅通过教学，而且也通过日常生活、游戏和劳动来实现。同时，内在的智力动作也外化为实际动作，使主观见之于客观。内化与外化的桥梁就是人的活动。另外，维果斯基还提出了"最近发展区"理论，"最近发展区"是指学生已经有可能做到、但又不能独立做到的那个区域。他认为，最近发展区决定着教学的可能性，而教学也应当以它为目标。教学始终并且应当走在发展的前面。维果斯基的这些思想，在70年代末以来，以布鲁纳为首的美国教育心理学家进行了大量介绍，这对"建构主义学习理论"这一被称为引起"教育心理学领域的一场革命"的理论的形成产生了重大影响。

由以上简单介绍我们不难发现，任何一种有影响的心理学理论，都是建立在明确的哲学思想指导下的。因此，要建立科学的数学教育心理学体系，没有哲学思想的指导也是不可能的。我们认为，在数学教育心理学的研究中，除了坚持辩证唯物主义和历

史唯物主义思想外，还必须应用数学哲学的研究成果。我们可以从如下几个方面来考察这样做的必要性。

第一，要有效地进行数学的学习与教学，必须首先认识清楚数学对象的性质和存在的方式，这是涉及到建立科学的数学观，从而形成正确的数学价值观的根本问题，这样也就涉及到学生对数学的情感问题。我们认为，对于“什么是数学”的回答，最重要的是要认识数学与现实世界的关系问题。就中学数学来说，“数学是研究现实中数量关系和空间形式的科学”的定义是不过时的。数学研究的对象既来源于现实世界（即数学的概念、原理是通过对现实世界中的事物在数量关系或空间形式方面进行抽象后获得的），又与现实世界中的具体事物有一定的距离（如数学中所讲的没有大小的点、没有粗细的直线是不存在的一样），数学概念、原理的建立过程，实际上是运用已有的数学知识和数学活动经验，对现实世界中相应事物及其关系进行不断抽象概括的过程，用现在比较流行的说法，就是建立数学模型的过程。我们认为，这些观念的建立，是学生树立正确的数学观念的前提，也是解决如何使学生形成自觉地将数学理论知识应用于实际问题的意识的前提。现在，数学的应用问题受到越来越多的关注，特别是方兴未艾的数学建模教学，更是把培养学生建立和处理数学模型的能力作为主要目标。如何加强数学教学与实际之间的联系，确实是数学教育的理论与实践中急待解决的问题。而在数学教育实践中，很多学生对解应用题并不感兴趣，同时，当他们遇到实际问题时（即使是一个非常简单的实际应用问题），他们也感到书本上所学的数学知识用不上。我们认为，数学教育心理学应该对形成这种状况的原因进行研究，而这就需要以数学哲学中关于数学对象的意义、价值、性质及其构成方式等的研究成果为指导。

第二，要进行有效的数学学习与教学，还必须搞清学生的数学学习过程的特点和规律。这就要求我们在教育心理学关于知识

学习过程的有关理论的指导下，认真研究数学概念、公式、原理等的学习特点和规律，而这又需要以数学哲学中关于数学认识论方面的研究成果为指导。数学认识论认为，数学认识过程是认识主体与数学理论这一客体进行相互作用的过程。从社会意义的角度，我们可以把数学认识过程分为数学研究过程和数学学习过程两类。数学研究的对象是人类社会的未知世界，这一研究过程的一般路线是:发现问题——提出假设——验证假设——获得结论。这里，问题可能是从人们在其他领域中提出的，也可能是从数学内部提出的；提出问题以后，人们会对问题的答案和可能的解决途径作出猜测并进而对之进行论证；如果论证成功，则对论证过程进行抽象概括以获得理论的完整表述，如果论证失败，则对猜想及论证过程进行检查与修正，并进行新的论证，直到获得正确结论为止。而数学学习的对象是人类社会的已知世界，这一学习过程主要表现为学生对数学内容（由数学教科书提供的）的理解、掌握和应用，其一般路线是：先学习基本概念和原理，然后，在基本概念和原理的指导下，逐渐展开理论体系（一般原理中所包含的具体内容），使学习的内容逐渐接近客观实际。显然，这一认识过程是与数学研究过程不吻合甚至是相反的。数学学习过程的这种特点是数学教育本身所要求的，是学校数学教学客观规律的反映，但是这又容易使处于发展阶段的学生误认为数学认识活动中可以没有实践环节，其结果往往是使学生在数学学习过程中缺乏自己自主的数学思维活动，把数学学习过程变成是对数学的基本概念、公式、原理等的纯形式学习过程。这样，既使学生缺乏应用数学知识分析问题和解决问题的能力，又因为缺乏数学实践而使学生的数学学习容易走向死记硬背，而且还会严重地影响学生对数学的情感。因此，数学教育心理学应该研究学生数学学习的一般特点和规律，同时也应研究如何使学生的数学学习更加接近数学研究的真实过程，以保证学生在数学学习过程中有足够的

机会进行主动的数学实践活动，从而使学生能在自己主动的思维活动下学习数学。这就要求我们认真研究在数学教学中如何把握认识与实践环节的比重和相互作用的途径，在避免从理论到理论的前提下，如何使学生尽快地建构起数学知识的逻辑体系。显然，这些问题的解决需要数学认识论的直接指导。

在数学认识论的研究中，还对数学的经验、直觉、抽象以及数学美等因素在数学研究活动中的作用问题进行了深入的研究，而数学教育心理学的研究中，对影响学生数学学习的内外因素的研究是重点之一，这两者在某种意义上是相互吻合的。事实上，学生的数学学习，既受其心理发展水平的影响，也受数学学习材料的影响，数学教师就是要在理解学生的心理发展水平、掌握数学学习材料特点的前提下，针对不同心理发展水平学生的特点，以他们所能理解的语言，有计划地向学生讲解数学学习活动中的经验、直觉、想象、猜想、抽象等的内涵，引导学生对这些因素进行有意识的、主动自觉地体验，感受数学学习过程中的数学美，从而提高学生的数学学习的层次水平。数学认识论告诉我们，人们对数学的经验、直觉、抽象、数学美的体验是互不相同的，不仅有层次差别，而且也有不同侧面的差别。只有通过主体自身积极主动的认识活动，才能使认识主体获得自己的体验。这样，教师在教学过程中，必须努力引导学生对数学学习过程中的经验、直觉、抽象和数学美等进行积极的体验，设计好教学情境，为学生提供这种积极体验的机会，而不能试图通过灌输的办法让学生理解教师自己的体验。

另外，教学过程的安排必须以学生数学学习活动过程的一般规律为依据。因此，数学认识论也在数学教学方法及其形式方面对数学教育产生影响。综合数学认识论中关于数学认识活动过程的各个环节及其相互作用的规律和学生数学学习过程中的其他心理因素（如兴趣、动机、归因、能力倾向、认知方式等），教师可

以更好地为学生提供恰当的教学情境，使教学情境更加符合学生的数学学习进程，这有利于学生克服学习过程中的思想障碍，使他们在一种更加主动的状态下进行学习，从而既能使教学变得更有成效，又能更好地发挥学生的认知潜能。

第三，数学教学的最重要任务是要培养和发展学生的数学能力，其中又以培养和发展学生的逻辑思维能力为重点。为了有效地进行数学思维能力培养，我们必须掌握学生的数学思维活动的一般方法和规律，而这又需要有关于数学思维活动的一般方法和规律的理论指导，即需要数学方法论的指导。众所周知，数学方法论主要是研究和讨论数学的发展规律、数学的思想方法以及数学中的发现、发明与创新等法则的一门学问（徐利治，1983）。从与数学教育的关系来看，数学方法论对各种数学思维方法的性质和作用的研究（包括对观察、试验、演绎、归纳、综合、化归、形式化、公理化、合情推理、逆向思维等方法的研究以及对数学研究中的审美感、直觉和形象思维等非逻辑成分的研究），对数学教育的意义最大，作用更直接。只有将数学方法论中关于数学思维方法的研究成果运用到数学教育心理学对学生数学学习及其教学的研究中来，才能使数学学习论的研究具有数学学科特点。同时，数学方法论关于数学思维的训练方式和途径的研究，为教师在数学教学中如何将自己的教学提高到既注重向学生传授知识，又注意在一个较高水平上对学生进行数学方法论方面的训练和培养提供了理论指导。众所周知，学生在数学学习过程中，需要运用各种方法来分析和处理问题，在分析和处理问题的过程中，既涉及到学生已有数学知识结构的性质，也与学生的数学思维品质水平和数学能力高低有关，同时还与学生的数学学习兴趣、动机等非认知因素有关。这样，教师在向学生传授具体数学知识的过程中，要注意发挥数学知识中所包含的数学思想方法的作用，向学生充分展示数学知识的获得过程，从而让学生经历相应的数学思维活

动过程，体验数学研究活动的真谛，领会知识中所包含的数学思想方法。这些都需要有数学方法论的指导。

总之，数学哲学的各方面研究都与数学教育实践有紧密的联系，能为数学教育心理学研究提供坚实的理论基础。只有在数学哲学的指导下，才能使数学教育心理学的研究既具有数学学科的特点，又具有理论的深度。

（六）关于数学史与数学教育心理学的关系

我们认为，数学教育心理学研究必须利用数学史所提供的生动素材。这里，至少有两个方面可以利用。第一，关于数学概念和原理的发展进程；第二，关于数学思维活动的原始过程（特别是数学家的数学研究过程）。

众所周知，人的发展是在无数代前辈人的全部经验总和的基础上进行的。人在掌握前人的经验时，要（简略地）重演前人获得相应经验的过程，“我们所赖以生活的一切和我们所占有的一切，本身都带有社会起源的痕迹。”（巴索夫，1926）因此，当我们考察和研究学生的数学学习过程时，必须注意吸收和借鉴作为人类社会活动经验结晶之一的数学概念和原理的发展经验。例如，学生在学习数 0、虚数、极限等概念时，常常出现理解上的困难，在学习用字母表示数时，常常对字母所表示的数的任意性感到困惑，而这正是数学发展史上，由于这些概念或方法的引进，引起数学研究工作者思想上的困惑的时期，而且，正因为突破了传统观念的束缚，引进了这些概念或方法，才使得数学研究的对象发生重大改变（从正数扩展到实数，从实数又扩展到复数；从定量研究转变为变量研究等），从而大大地推动了数学研究进程。因此，学生在理解上的困惑，某种意义上可以看成是数学发展史上发生思想困惑的重演。这样，借鉴数学发展史上的经验，我们可以准确地预计学生在数学学习过程中可能产生困难的地方，能更正确地判断产生问题的原因，能更有的放矢地为学生安排数学学习进

程，为学生的数学学习提供更加恰当而有效的帮助。

数学思维活动经验对数学教育具有更大的现实意义。例如，数学家是如何从实际问题或数学研究的内部发现并概括出数学问题的；在解决问题的过程中，他们的思想历程是怎样的；在遇到困难时，他们是如何设法解决的；他们采取什么办法来打破思维的僵局，开拓自己的思路；他们是如何修改、整理自己的思维过程，把自己的思想精确地表达出来的，等等。这些数学思维活动经验，对于数学教师理解学生的数学思维过程，恰当地安排学生的数学活动，使学生在活动中主动地获取数学知识，具有极大的启发性。因为学生在数学学习活动中的思维过程与数学家在数学研究中的思维过程，具有较大的相似性。另外，数学教科书中的知识体系一般是按照"定义、概念、原理——举例——应用"的顺序安排的，这与数学知识的原始获得过程、与学生的数学思维进程都是相反的。数学教师必须借鉴数学家在获得数学概念、原理时的思维活动过程，分析学生的数学思维过程，并据此设置教学情境，这样才能使教学符合学生思维活动规律。因此，数学教育心理学研究必须重视数学史的作用。

(七)批判性地吸收和借鉴国外的数学教育理论及研究经验和成果

前面已经指出，数学教育心理学是一门处于发展过程中的学科，西方的发展早于我国，理论与实践都走在我们的前面。因此，我们必须虚心地向他们学习。例如，伴随着建构主义观点的兴起，教育心理学正在经历着一场革命。相应的，数学教育中也提出了数学教育的建构主义观点，认为学生的数学学习过程是学生利用自己已有数学认知结构中的相关知识（包括从书本上学习的和从日常生活经验中获得的）与新知识进行相互作用，主动地从数量和空间关系的角度来选择和注意信息，并主动地建构信息的数学意义的过程。建构包含了两方面的含义：一方面是对新信息（新

知识）数学意义的建构，另一方面是对已有数学知识经验的改造与重新组合——已有数学知识的应用过程并不仅仅是从长时记忆中简单提取出相应的数学知识，而且也包含了对它们的加工改造。每一个学生都有自己对数学知识的理解方式，不同的学生对同样的数学知识有不同的理解，他们看到的是同一数学知识的不同方面。这样，数学教学中就应当特别注意引导学生加强合作，使他们相互启发，取长补短，从而尽可能全面地理解相应的数学知识。这些观点对于加深理解学生的数学学习过程，转变我们的数学教育观念，无疑具有重要意义。然而，我们又必须注意到，由于学生的认知发展水平的限制，他们在对信息的数学意义的建构过程中，存在较大的盲目性，因此，学生对信息的建构活动（新知识的学习活动）必须处于教师的帮助指导下，这一点在西方数学教育心理学研究中是重视不够的，而重视研究教师教的规律性正是我国数学教育理论研究的长处。另外，在建构主义观点下的“问题解决”教学，在加强学生学习主动性的要求下，强调了所谓问题的“开放性”，更有走极端的，认为可以把数学知识系统的学习置于“问题解决”过程之中，结果使学生的数学学习常常停留在具体解答的获得上，从而降低了数学知识的理论水平层次，使学生难以获得对数学概念的理性理解。类似的这些问题，都是我们在研究过程中应该予以特别注意的。

总之，在数学教育心理学的理论建设中，涉及到的问题很多，需要考虑的因素也很多。只有认真、全面地对有关问题进行深入思考，理论联系实际，运用成熟的教育和心理科学研究方法，结合数学学习、教学的实际，结合我国的具体国情，把数学教育心理学理论建立在数学教学与心理实验的基础上，才能找到一条既反映数学学科的教与学的内在规律，又符合我国基础教育实际的研究之路，建立具有中国特色的数学教育心理学科学体系。

第一章 数学教育中的几个理论问题

第一节 数学素质及其培养

数学教育改革在基础教育阶段由“应试教育”向“素质教育”转轨的大背景下进行。因此，关于数学素质和数学教学中贯彻素质教育思想的议论和文章随处可见。然而，细心的读者不难发现，人们对什么是数学素质、数学教学如何贯彻素质教育思想的认识是千差万别的。这种状况，一方面说明数学教育研究正在继续深入，人们的思想活跃；另一方面也说明理论研究中出现了一定的混乱，这种混乱如果不及时澄清，将对我国的数学教育改革产生不利影响。

众所周知，素质是人的内在之物，是一种精神，一种品质，一种“无形之物”。没有任何一种单独的特征能够概括“人的素质”，然而素质又随时会以某种形式表现出来。素质是一个人的品格、精神、知识、能力、学识、言谈、行为举止等的综合。人的素质是以先天遗传因素为基础，在后天环境的作用下逐渐养成的，而且后天环境影响是决定性的。在后天因素中，学校教育的影响又是举足轻重的。学校教育中，各学科都担负着提高学生素质的共同任务，而各学科又在素质教育中发挥着自己独特的作用。数学教育在人的素质养成上具有不可替代的作用，“直观思维、逻辑推理、精确计算以及结论的明确无误”，“是每个公民的科学文化素质”，这些素质的培养主要依靠数学教育。在基础教育阶段，通过数学

基础知识的学习，数学思维方法的训练，可以使学生养成“数学”地思维的习惯，形成“数学”地观察世界、处理和解决问题的能力。

实际上，说一个人的数学素质好，与我们平时说的一个人有数学头脑的意思差不多，归根到底是指他能够从数学的角度来思考问题，“数感”好，有数量概念和规律概念，能够辩证地看问题，等等，而这些素质的养成则是在长期的数学具体知识学习过程中潜移默化地完成的。数学素质是与人的心理发展密切相关的，因此，数学素质的形成与发展存在着年龄特征的问题，不同年龄阶段具有不同的数学素质特征。这样，数学素质的研究应该采用静态与动态相结合的方法，即从静态上要分析数学素质的基本构成因素，从动态上要探讨不同时期人的数学素质的发展变化。而在数学教学过程中，则要根据这种发展变化的特点，在不同时期对数学素质进行有侧重的培养，将数学素质的培养与具体知识的教学结合起来，把数学素质的培养落实在课堂教学之中。

显然，一个人的数学素质与他所具有的数学知识和数学技能密切相关，一个数学知识贫乏的人不可能表现出良好的数学素质，因此，数学知识和技能是数学素质的基础。由于数学素质主要是在思维活动中表现出来的，因此我们可以从人的思维活动过程来考察。另一方面，从系统论观点出发，我们可以把素质作为人这一整体中的一个子系统，而数学素质又是素质这一系统中的子系统，因此，探讨数学素质的组成因素又要从数学素质在人这一整体中的地位和作用，数学素质本身整体与部分、部分与部分之间的关系等方面进行考察。另外，数学素质与人的数学能力密切相关，但又不能等同。总的来说，与数学能力比较，数学素质更加“无形”，层次更高，但它们两者又是互为条件、相辅相成的。因此，探讨数学素质问题又与数学能力问题密不可分。

总之，数学素质是多层次、多侧面的，对数学素质的探讨也

可以从不同水平、不同方面来进行。下面我们从人的思维活动中所包含的数学活动成分这一角度，对数学素质进行探讨。

王梓坤先生指出，定量思维“是指人们从实际中提炼数学问题，抽象化为数学模型，用数学计算求出此模型的解或近似解，然后回到现实中进行检验，必要时修改模型使之更切合实际，最后编制解题的软件包，以便得到更广泛的方便的应用。”[①]我们认为，王梓坤先生的这一论述是对人的思维活动中所包含的数学活动成分的最精确的描述，因此，它可以作为我们研究数学素质的一个总的指导思想。

一 精确的定量思维和准确的定性思维

从王梓坤先生的论述中可以看出，定量思维贯穿于解决问题的始终，而数学计算在其中又起到非常重要的作用。事实上，在基础教育阶段，定量思维主要靠数学的精确计算来培养。众所周知，计算和演绎是数学中紧密结合在一起的过程，从某种意义上说，数学学习的主要作用是形成“算法的思维”，培养按照规定的运算程序计算的习惯和设计新的计算程序的能力（实际上，数学的公式、法则、定理等都可以理解为规定好的计算程序）。数学计算是数学课堂上的一项重要的教学活动，思维的创造性和应用数学的能力都可以从中得到培养。在数学学习过程中，时刻需要构造算法、选择算法。通过构造算法、比较不同算法的效率并选择算法的实践，学生逐渐地养成从事智力活动的习惯：计划自己的工作，寻找完成工作的合理途径，对结果进行批判和评价。

计算包括根据法则进行的精确计算、心算和估算。按照运算法则进行计算训练了学生的推理技巧，培养了按程序进行操作的技能，使学生形成了按规则办事的素养和习惯；而心算和估算则

---

① 王梓坤．今日数学及其应用．数学通报，1994（7）

培养了学生全面把握问题情景、洞察事物本质的能力，对数据特点的准确理解、对算法的合理选择、对结果合理性的正确判断等能力。精确计算是一种定量思维形式，有一定的规律可循；估算是对当前所面临的情境的一种整体把握，是通过与头脑中已有数学模型的类比而实现的，是对事物本质的直觉判断，因而是一种定性思维形式，有更大的灵活性和可变通性。

估算反映了一个人在面临问题时的一种选择、判断能力，而形成这种素质的基础是精确计算的训练。在精确计算过程中，一方面要求学生在理解算理的基础上讲究算法的合理性，并在计算速度上达到一定水平，在此基础上再要求学生不断对计算结果进行估计，以培养学生适合于估算的"感觉"，形成对事物发展前景和结果的判断能力。在处理问题时，人们可以凭借这种"感觉"，对采取什么方法、方法的可行性以及可能的结果等作出判断。实际上，现实世界里，精确是相对的，模糊是绝对的，这样，对事物发生发展可能性的估计、对结果可能性的判断以及相应的对行动方案的选择，都需要人们的估计能力。例如在购物、旅行、观看体育比赛、投资、游戏等活动中，都涉及到"估计"，当学生获得现实世界各种活动的日益广泛的经历，这些活动的结果可以由对各种数字进行大致估算而得到预测。

当前，人们对计算有一些误解，认为计算就是按照各种运算法则进行加、减、乘、除，因此，学习计算就是把书本中给出的计算法则背诵熟练，形成一些计算的基本技巧，即能够根据熟记的法则，迅速地计算出给定式子的正确答案。实际上，按照算法规则进行逻辑推理而获得正确结果仅仅是计算的很小一个方面，更重要的，在计算中包含着对算法的构造、设计、选择，对算理的理解、运用，这是一个"数学实验"过程，其中包含了丰富的数学实践，它可以使学生更加深刻地理解数学的真谛。

二　数学地看待事物和对事物进行数学抽象的能力

实际上，数学也像其他科学和技术一样，是从普通的人类实践中发展起来的，数学理论是不断抽象的产物：实际问题与理论研究相互促进，并不断扩展到未解决的理论和实际问题，在这一过程中，数学的复杂性、理论性不断增强，同时又变得更加具体更加生动，以能更加有力地解决现实中的问题。在学生的日常生活中，能够遇到许多产生这种发展的自然机会。这样，一方面，学生应该在懂得数学在社会发展进程中的作用以及数学本身的发展历史的基础上，逐渐地了解并探索数学与物质世界、人类生活的关系，以养成从数学的角度看待问题的习惯；另一方面，数学教育又必须抓住并且强化这种机会，以使学生能够体验、理解数学的性质，认识数学可以帮助他们在非数学领域中取得成功，有时这种帮助是决定性的。

数学抽象是一种抽象之上的抽象，具有过程性和层次性的特点。众所周知，抽象过程是从认识事物之间的相似性开始的，在分析这种相似性的某些特点的基础上，再以这些特点为标准对事物进行分类，从而获得对一类事物的认识，然后再选择适当的词、符号、图形等来表示这类事物的共同特点。对基础数学而言，数学抽象是从数与形两个角度进行的：在漫长的过程中，儿童通过计数活动（以模仿的形式，借助于手指、眼睛、声音），首先将自然数抽象出来；然后通过像把两堆物体合在一起的这类操作，将加法抽象出来；再次，加法运算本身作为一种特定的事物，与其他事物一起加入了更进一步的抽象，……这里，每一个抽象过程都伴随着符号的使用，数字“1，2，3，…”，运算“＋，－，×，÷，…”，图形的位置关系“⊥，//，…”等，这些符号实际上代表了事物的某一个公共特点，但却忽略了它们的不同方面。数学的这种抽象过程，使学生获得了这样一种素养：面对错综复杂的

事物，能够把注意力集中在对研究问题起关键作用的特征上，并用恰当的方法表示出这种特征，从而方便地进行深入的思考，顺利地与别人进行交流。数学抽象及其符号表示是对学生的思维方式的训练，是对学生进行的简捷、严谨、有序的思想表述的训练，这是其他学科所无法替代的。然而，现实教学中，这个问题并没有引起广大教师的重视，甚至可以说是被忽略了。在基础知识的教学过程中，不给学生展示知识的发生发展过程，学生的思维没有机会经历结论的抽象过程，基本概念、基本原理采用“一个定义，三项注意”式的教学，在学生还没有对基本概念有一个大概理解的时候就要求学生应用概念去解决问题，显然，这与数学知识的抽象过程是背道而驰的，对培养学生的素质也是非常不利的。

三　对事物本质的洞察力和严谨的推理能力

逻辑推理的敏捷性和清晰性是优秀数学头脑的特点。数学学习，不但要学习作为“合格公民”所必须具有的数学基础知识和基本技能，而且还要学习并掌握数学的思维方法，获得数学思维的发展，培养数学思维能力。由于数学学科具有高度抽象性和严密逻辑性的特点，数学学习对于发展学生的抽象逻辑思维能力具有特别重要的意义并有着特殊的作用。通过数学论证方面的训练，学生领悟依据逻辑进行思考、表述的真谛，从而学会逻辑地、首尾一致地思考，这是数学学习在人的素质培养上的重要贡献。所以，长期以来，人们一直把数学教学看成是发展学生的推理能力和逻辑思维能力的最好途径。即使在当今信息时代，对错综复杂、千变万化的信息的判断和选择的能力显得越来越重要，但是，由于推理能力在人们对面临的问题进行分析、评判，对解决问题的方法作出选择的过程中的重要作用，人们仍然非常重视培养和训练学生的推理能力。

然而，我们必须特别注意，严密的推理能力并不能只靠向学

生灌输一些逻辑法则，然后让学生通过模仿来运用这些法则（尽管模仿是必须的）而得到培养，事实上，这种教学只能增加学生记忆上的负担，削弱对法则本质的理解。数学中，逻辑与直觉、推理与猜想总是相互伴随的：开始，人们通过学习前人的经验而产生了对数学知识的记忆，当记忆达到一定的丰富程度后，会产生一些有意义的联想，通过类比又会产生新的联想，然后再对联想到的类似物进行归纳、抽象，依靠逻辑推理而产生对事物本质的认识。有人认为，数学是研究自然中的数学现象的科学，因此，理解数学首先要靠“观察”数学现象。这里的“观察”当然不是靠眼睛，而是依靠某种难以言传的感觉——对于数的一种直觉（“数觉”），这种“数觉”是数学家凭借自己长期的数学研究实践而逐渐形成的，它使数学家具备了对复杂事物因果关系的敏锐洞察力，凭借这种洞察力，他们可以非常迅速地抓住事物的本质及其相互之间的重要关系。在数学的发展历史上，有许多著名的猜想（Fermat 定理、歌德巴赫猜想就是其中的杰出代表），就是数学家具有敏锐洞察力的表现，他们能够跨过错综复杂的性质和相互联系，一下子看到一种现象的普遍性，从而提出猜想，然后再从逻辑上进行证明。证明可能非常困难，但是寻找证明工具和证明思想的活动却大大地推动了数学的进展。因此，数学发展的历史是直觉与逻辑的严格性巧妙结合的历史。

由以上论述我们可以得出，严格的推理与敏锐的直觉在数学学习和研究中是和谐统一的。因此，严格的数学训练不但可以培养学生根据规则进行逻辑推理的能力，使他们养成一种坚定不移而又客观公正的为人品格，形成一种严格而精确的思维习惯，而且还可以培养他们直接抓住事物的主要关系，洞察事物的本质、把握全局、明辨是非的能力，培养他们快速反应、灵活应变的能力，从而提高他们对不断变化的世界的适应能力。

四　应用数学解决实际问题的意识

数学来源于现实，经过对现实的抽象，并用一些符号来表示它们，再经过逻辑演绎和计算，从而获得了从数学角度对事物性质的认识。为了检验这种认识的正确性，又必须回到现实中去。在我们获得对现实的数学认识，得到一个原理、一种数学规律等以后，我们必须回到数学的现实源泉去，在某种程度上把它重新对应到经验概念中去，这既是一个检验原理、规律的可靠性的过程，也是一个数学应用的过程，这是保持数学的生气勃勃和有效性的必要条件。事实上，即使是逻辑推理的规律也是来源于实践的，因此，我们可以（而且应该）将数学中对于推理思维的逻辑检验也看成是一种实践检验。所以，回到现实，数学原理接受实践的检验，这是数学研究的一个有机的组成部分，是数学科学不断获得发展的保证。这样，当前数学教育研究中对“问题解决”、“数学建模”的强调就可以看成是对数学研究的实际过程、本质的一种回归。实践检验是数学应用的形式之一。

另外，当面临一个问题时，人们可以从问题所包含的信息中获得对已有数学理论的联想，通过应用一个数学理论或者综合应用几个数学理论，人们不但可以解决面临的问题，而且可以获得对不同数学理论之间内在联系性的认识，获得对一个抽象的数学理论应用于不同实践领域的认识。这种联系和认识常常能够引导人们利用一个领域已知的信息去发现另一个完全不同领域的新信息，“数形结合思想”就可以看成是这方面的一个典型代表。建立不同数学理论之间的联系是数学应用的又一种形式。

因此，通过数学学习，使学生养成用数学方法观察现实世界，能够在他的职业和日常生活中使用数学，用数学去分析、研究具体现象和事实，并对它们进行组织整理，在自己已有认知结构的基础上进行主动的建构活动，养成用联系的观点看待事物的习惯，

形成在不同领域中发现共同特性的能力以及一个理论应用于不同领域的能力，能够恰当地用数学来解释问题，这是数学教育对人的素质培养的又一贡献。而这又与人的动手能力、发现问题和提出问题的能力以及用数学意识、创新意识等能力和意识培养和形成有着非常直接的关系。

在信息社会中，人处于终身发展之中，只有随时学习，随时更新知识，才能跟上时代发展的步伐。个体的知识更新将越来越依赖于经验而不是被动地消化事实来完成。因此，知识的应用与知识的学习在人的现代生活中是高度统一的。然而，由于数学语言的抽象性，数学在实践中的众多应用的间接性，使得一般人难以看到和体会到数学与日常生活的密切关系。更加严重的是，现在的数学教材和数学教学过程，都是从概念到概念、从定理到推论，处处强调逻辑演绎的严格性，而对数学的现实背景、定理或公式的发现过程却闭口不谈，这就导致学生对数学产生了这样一种信念：学习数学就意味着记住书本上的定义、法则、公式、定理等，形成一些基本技能和技巧，能够顺利地进行运算、变换或变形、解方程、证明等。他们能够把一条数学定理的证明过程推导得非常熟练，但对于定理所包含的根本思想却可以全然不顾，更不用说这种根本思想的来龙去脉了。所有这些都极大地削弱了数学与人们的日常生活本来具有的那种非常紧密的联系，使得人们看不到“自然环境”中出现的数学，体会不到与数学伴随着的猜测、检验、放弃、形成假设、演绎推理、一般化等活动。过分强调数学的确定性、精确性而忽视数学的似真性、可变性的数学教学不但使人们对数学产生误解，降低了数学在实际生活中的作用，而且由于数学活动中的观察、直观描述、猜想、试验等被大大地淡化甚至取消，从而使数学在培养人的素质方面的作用也受到极大的损害。因此，为了培养学生用数学的意识，教师应该在数学课堂教学中恰当地引进学生所熟悉的生活环境中的实际问题，加

强数学知识发生、发展过程的教学，并要引导学生通过自己的实践认识数学的作用，以培养学生用数学去描述、理解和解决他自己熟悉的社会实际问题的能力。

五　用数学语言进行交流的能力和良好的符号意识

人们常说，数学是科学的语言，我们认为，数学也是一种日常生活语言。例如，为了否定“所有人都爱看足球”这一语句，我们必须说“不是所有的人都爱看足球”，而这又与“有的人不爱看足球”等价；当有人想说“所有人都不爱看足球”时，有一定数学修养的人马上会想到，这将意味着没有一个人会去看任何一场球赛。实际上，数学已经成为自然科学、社会科学和行为科学的基础。可以说数学已经渗透到人类社会的每一个角落，数学的符号和句法、词汇和术语已经成为表述关系和模式的通用工具，因此，数学语言是每个人都必须学习使用的语言，使用数学语言可以使人在表达思想时做到清晰、准确、简洁，在处理问题时能够将问题中各种因素之间的复杂关系表述得条理清楚、结构分明。

数学交流能力是一种重要的数学能力。从数学学习过程来说，通过学生自己的亲身实践、主动建构而理解知识的精神实质、提高数学思维水平，这是一个层次；通过班级、小组或者朋友之间的数学交流，逐渐学会清晰、准确而有逻辑地表达自己的思想，善于倾听别人的理解，内化别人的思想，以达到同学之间的相互学习、相互提高，这又是一个层次。只有具备了数学交流能力，学生才能顺利地阅读和理解数学文献，才能用口头或书面的形式向别人解释自己的数学学习体会和数学研究结果，才能成功地吸收别人的心得体会而迅速地提高自己。能否成功地进行数学交流，不仅涉及一个人的数学能力，而且也涉及到一个人的思路是否开阔，头脑是否开放，是否尊重并且愿意考虑各方面的不同意见，是否乐于接受新的思想观念和新的行为方式，是否愿意相互了解，为

人处事是否做到尊重与自尊，等等。显然，这些都与现代人必备的素质有着十分密切的关系。

在数学交流过程中，数学符号扮演了非常重要的角色。数学发展的历史表明，正是由于数学家创造了反映数学概念本质的数学符号（如自然数 1，2，3，…；变量 x，y，…；微分 $\mathrm{d}x$，积分 $\int$ 等），才使得人们能够方便地表达自己的数学思想，阐述自己的研究成果。由于数学符号实际上是一个内涵丰富的“信息组块”，因此它可以成为人们进行智力活动时理想的思维载体，这样，数学语言符号如果成为一个人所自然习惯的语言的一部分，那么，他在广阔的实践领域中进行精确的数学议论和分析的能力将大大增强。

数学教学，可以提高学生有效地使用符号进行交流的能力，使他们逐渐养成在处理问题时自觉地引进适当的符号来表述问题中的关键事项的习惯；能够确定适当的符号程序以表示各事项之间的相互关系，并能对符号系统进行推理，获得结论并检验所得结果的准确性和合理性。

值得指出的是，人们对数学交流存在不正确的理解，这种不正确的理解导致了人们对数学学习认识上的偏差。人们普遍认为，因为数学知识的抽象性，它在表述上的严谨性以及数学语言的特殊性，所以人们的数学交流方式是高度一致的，这也就决定了数学学习过程的统一性：学习数学等于“了解答案”，寻找一组强有力的定理，并用于解答进一步的数学问题。这样，数学学习过程中，只要是你已经理解的事情，你就可以很容易地把它表达出来，并能够容易地使别人得到理解。因为有了这样的认识，教师在上课时往往是基础知识、基本原理三言两语一带而过，不给学生理解的时间和表达自己理解的机会，也不组织学生讨论，而是让学生花费大量时间进行重复性的强化训练。这样的数学教学，不但

会使学生感到数学知识神秘莫测，产生数学学习的恐惧心理，而且还会因为数学教学过程的千篇一律，缺乏生动性、具体性、差异性，而导致学生对数学学习的厌烦心理。实际上，一个数学定理常常蕴涵了大量信息，从背景材料、证明思想以及定理的应用等各个环节上都包含了非常丰富的具体内容，人们常常需要用大量的时间和精力，才能理解一个定理的细节。而在理解的过程中，人们会表现出与自己的知识经验相关的特点。为了使自己对知识的理解能够以某种方式恰当地传达给别人，他们又必须学会相互理解。因此我们可以说，“理解”是群体相互交流的结果。

六　良好的自我反省和自我调节能力

智慧活动是人类活动的深层次结构。学会了对自己的智慧活动进行反省和有效的自我调节，是智慧成熟的标志，这样才能实现人对自己活动的主动监控。在活动过程中，一个人要做到客观公正地评价自己和他人，遇事独立思考和分析，既不固执己见，又不人云亦云；根据活动的要求，选择恰当的解决问题的策略，监督认知活动的进程，及时获取反馈信息，对自己认知活动的有效性作出判断，并调节自己的认知过程，坚持或更改解决问题的方法和手段，优化自己的学习过程，减少认知活动的盲目性、冲动性，提高认知活动的效率，增加成功的概率等，都需要有较好的自我反省和自我调节能力。事实上，反省活动是人的高级心灵体验活动，它可以使人对自己的错误观念进行深刻的理性认识，在剖析产生错误的前因后果以后，产生正确的认识，从而实现认识上的“知其然，又知其所以然”。某些不正确的观念形成以后往往根深蒂固（所谓的“先入为主”），只有通过深刻反思，从错误中引出深刻教训以后，才能得到真正纠正。数学教学中常常有这样的情况，学生总是在某一个地方出现重复性错误，老师则反复强调“这里应该如何如何”，但是学生在今后的学习中仍然是“我行

我素”，究其原因就是在纠正错误的过程中，学生并没有进行真正的反思，没有得到什么深刻教训。

由于数学学习材料的抽象性，导致了数学学习活动的高度抽象性。这种具体性较差、与现实有一定距离的学习活动，更加需要对活动过程的自我意识，这是因为学生的数学学习是螺旋上升的，对新知识的认识是在对已有知识进行反思的基础上实现的，因此，数学学习需要学习活动和对活动过程的自我意识（自我反省和自我调节）的协调统一。然而，目前的数学教学中并没有意识到对学习活动的反思和调节的重要性。轻视基础知识、基本概念的教学，迷恋大运动量的解题训练，以获得正确答案为目的，很少有对解题过程的反思，也很少对解题经验教训进行总结，更不用说对问题的引申、一般化，对数学思想方法的概括了。这样做的结果是导致数学学习的“高投入、低产出”，学生和教师双方的负担都非常沉重。因此，数学教学中贯彻素质教育思想，当务之急之一是要还学生以学习的主动权，不做拔苗助长、急于求成之事，允许学生有学习上的反复，使他们有时间、有机会对自己的思维活动过程进行反省，对自己是怎样发现和解决问题的、应用了哪些基本的思考方法、技能和技巧、走过哪些弯路和犯过哪些错误、原因何在、从中可以获得哪些经验教训等进行认真的剖析，并逐渐培养随时监控自己的数学思维活动的习惯。当然，教师在培养学生的反思和自我调节能力时，要有一定的技巧，例如在平时要注意积累学生表现出的心理能力的闪光点或思维障碍的典型材料，有针对性地设计反思问题，并鼓励学生现身说法，开展积极的评论和研讨。

我们认为，数学素质归根到底是一种文化素质，这就如同人们把数学看成是一种文化一样。相应的，数学教育也就是一种文化素质教育。显然，文化素质的养成不是一朝一夕的事情，需要在具体文化知识的学习过程中潜移默化地进行。因此，动态性是

数学素质的精髓。首先，动态性表现在数学素质是主客观的统一上，是主体在数学活动过程中与客体交互作用的结果；学生在学习过程中，随着年龄的增长、知识经验的不断丰富及能力的不断提高，他们的数学地看待和处理问题的自觉性、主动性及其能力也在不断加强，并在活动过程中使数学素质不断提高。其次，动态性表现在数学素质的发展上，数学素质不仅是它所具有的内在成分及其相互关系，更重要的是它的发展变化，这是一个更加本质的问题。总的来说，数学素质的发展应该具有一系列的阶段性，不同阶段具有不同的本质特征，有不同的表现形式；数学素质的发展是一种内化、深化和全面化的过程，它要经历一个从低级、不随意到高级、随意的过程，在活动过程中表现为从只注意事物的外部联系、物化结构向自觉注意事物的数形结构、洞察事物的内部联系的方向发展。第三，动态性表现在活动是数学素质的起点和动力。就目前的研究状况来看，对于数学素质的静态性研究较多，而对动态性研究很少。因此，在今后的研究中，应该把动态性研究作为一个重要和主要的研究方向。

第二节　启发式数学教学

一　启发式教学的基本内涵

教学改革的关键是教学思想的改革。因为教学思想对教学活动起着定向的作用，以不同的教学思想指导教学实践，就会产生不同的教学效果。只有在正确的教学思想指导下，教学活动才能符合教学规律，才能充分调动学生学习的积极性和主动性，才能培养学生的独立性和创造精神。

我们认为，数学教师确立启发式教学思想是其教学取得成功的根本保证。因为作为贯穿教学过程始终的启发式教学思想，其

核心是把教学过程看成为师生生命活动的一部分，教师视学生为完整的人，根据认知目标与情感目标并重的要求安排教学过程，充分调动学生的知、情、意、行等诸方面的积极性，引导学生独立自主地开展思维活动，融会贯通地掌握知识、发展能力、培养创新精神和创造能力。

这里要特别说明的是，启发式教学思想的学生观具有整体性，即学生是一个完整的生命体，教学活动是他人生中的一段重要的生命经历，在教学活动中，学生的知、情、意、行等诸方面不但获得了发展，而且也反作用于教学；培养目标具有全面性，即课堂教学不仅要发展学生的认知能力，而且也要发展学生的情感体验和情感控制能力，课堂教学要实现完整的人的教育；启发式教学思想要求在课堂教学中充分发挥师生的生命活力，认为唯有这样才能使教学促进学生的发展和教师的成长。

二　启发式数学教学的基本要求

启发式数学教学的基本要求可以从数学学习材料、数学教学目的、数学教学过程及数学学习规律等几个方面进行探讨。

（一）由数学学习材料决定的要求

数学学习材料是数学教材中的数学知识，它们是实行启发式数学教学的“物质基础”。因此，数学教学实行启发式必须以数学知识的性质为依据。

众所周知，数学是研究现实中数量关系和空间形式的科学，它有内容的抽象性、应用的广泛性、推理的严谨性和结论的明确性的特点，而抽象性是其最本质的特性。数学的对象是抽象思维的产物，例如，自然界中存在的是各种直线形、平面形、多面体形和球形等物体，但几何中研究的是没有大小的“点”、没有粗细的“直线”、没有厚薄的“平面”，而各种各样的平面图形、立体图形则是一些“理想图形”；自然界中存在的是事物之间的复杂多样的

联系方式，在数学中被抽象为函数；由于数学内部各分支间的相互渗透、数学与其他科学的相互渗透，数学家们有意识地、人为地引进一些新的概念的情况也非常普遍。因此，人们在学习或研究数学时，事实上必须经历两个阶段：获取数学研究对象（将自然界中的事物从数或形的角度理想化、将现实问题抽象成为数学问题、在已有概念中引出新概念或赋予概念以新的含义）和对这些对象的性质及其相互关系进行研究。

由数学对象的抽象性本质可以看到，能动的抽象思维在数学的学习或研究中占据了突出的地位。由于思维依赖于人脑的机能而存在，是人脑对客观现实的概括的、间接的反映，因此具有强烈的主体性，即人的思维是无法由他人代替的。这样，数学的研究对象和数学的研究活动都带有强烈的主体性。这种主体性就决定了人们在学习或研究数学时，必须充分发挥自己的主观能动性，唯有这样才能取得好的效果。这样，在数学启发式教学中，教师必须调动学生的主观能动性，引导学生通过自己积极主动的思维活动来学习数学、获取知识；必须把培养学生的数学思维能力、获取数学知识的能力作为根本任务。设计教学过程时，一定要让学生有机会经历各个抽象阶段：从现实中抽象出数学对象（材料），通过从大量的或复杂的数学材料中抽取最重要的、本质的属性或特征，从表现形式不同的数学材料中分析它们的共同点的思维活动，形成新的数学概念（数学对象），通过分析数学对象的特征及其之间的联系或关系，掌握数学的定义、定理、公式、法则等。

由于数学教科书所表述的是数学知识的逻辑体系，是一些经过加工整理的数学抽象（思维）的结果，数学对象的抽象过程、数学思维的活动过程都被掩盖起来了，这就使教师在数学教学过程中容易出现重视数学结果而忽视数学思维活动过程（特别是数学对象的抽象过程）的倾向。教学中，教师三言两语地向学生简单介绍概念，然后举几个关于概念应用的例子，接着就要求学生应

用概念解答问题的情况是十分常见的。这事实上是在学生没有真正获得概念时就要求学生应用概念，或者说是在没有获得数学对象时就要求学生对数学对象之间的关系进行认识，显然，这种认识是没有基础的，自然也就不可能取得好的效果。所以，启发式数学教学要求教师能够克服数学教材对教学产生的不利影响，注意根据教材提供的线索，安排适当的教学情境，向学生展示相应的数学思维过程，让学生有机会经历数学的各个抽象阶段，避免数学学习的表面化。

（二）由数学教学目的决定的要求

数学教学的目的就是要促进学生的发展。数学教学，不但要使学生的数学认知结构获得发展，而且还要促进学生的一般发展，其中，特别要发展学生的抽象思维、创造精神和创造力。

首先，数学教学是在教师的主导下，有目的、有计划、有组织地学习数学知识、培养数学能力、发展智力的过程，是学生数学认知结构发展的主要途径。学生的数学认知结构在数学教学中的不断发展，是一个数学认知结构的不断建构的过程，在这个过程中，数学认知结构逐渐由低水平向高水平进化。在数学教学活动中，学生所获得的数学知识由浅入深，知识面由窄到宽，他的数学知识系统得到不断充实、丰富，数学能力得到不断提高。

按照当代认知心理学的观点，学生数学认知结构的发展是随着学习层次的深入而获得的。学生利用他已有的数学认知结构积极主动地与新数学知识进行相互作用，或者将新数学知识同化到已有数学认知结构中，从而丰富已有的数学认知结构，或者改变已有数学认知结构以顺应新的知识，使数学认知结构得到发展。从认知的角度看，启发式数学教学对学生数学认知结构的发展应在如下两个方面发挥作用：

第一，为学生的数学认知结构的发展确定方向和目标。现代认知理论指出，现在的教学再也不是教授学科之间的差异，而是

为了引导学生对科学家、学者构建学科理论、原理、法则时所用的思维模式和策略的模仿，引导学生概括所学的知识，了解更加逼真的科学现实。因此，在启发式数学教学中，教师应当根据学生现有数学认知结构的特点和水平，把掌握数学的基本概念、基本原理和法则，以及它们所蕴涵的数学思想、方法作为教学的最主要目标。

第二，为学生的数学认知结构的发展提供良好环境和条件。首先，教师根据教学目的、学生的现有认知发展水平以及数学的逻辑体系来精选教学内容，编排出一种概括性强、操作性好的数学教材结构，以利于学生理解和学习，便于学生记忆、检索，达到学习迁移。其次，在教学中，教师充分利用学生现有数学认知结构，以此作为同化新知识的基础，设置一定的教学情境，以引导学生的认知活动。在学习概念、原理时，教师给学生提供丰富的、典型有效的直观背景材料，使学生在概念、原理的导向下，通过自己对材料的积极主动的思维活动，达到对概念的理性认识，并进一步指导学生将获得的概念进行归类、组合，构成一个便于操作的概念体系。在应用知识解决数学问题时，教师为学生提供一定的线索，在思维方法、认知策略上给以指导，以便学生能顺利地解决问题，并从中体验数学的思想、方法，深化知识学习，获得数学能力，使智力得到较好的发展，从而使学生的数学认知结构获得良好的发展。

其次，数学教学中，学生除了获得数学认知结构的发展外，他们的身心也获得发展。“教学，这是学生的心理发展，形成他的智能、注意、记忆和心理的所有其他方面的新品质的主要动力。”因此，启发式数学教学必须为学生的全面发展服务。

前苏联心理学家维果斯基认为，学生的发展水平可以区分为两种，一种是现有发展区，它是评定学生已经达到的发展程度(水平层次和范围)、现有发展特点的依据，这是教学的出发点；第

二种是“最近发展区”，它是一种潜在的、可能的发展水平，是经过教师的启发指导和学生自己的努力所能够达到的发展水平，这是教学所应该努力追求的目标。教学只有以学生的现有发展水平为基础，以“最近发展区”为定向，才能有效地促进学生的发展。所以，启发式数学教学应当充分发挥学生现有发展水平的积极作用，在学生的“最近发展区”上去帮助学生解决认知矛盾，促成学生的“最近发展区”向现实发展水平转化。要使学生经常处于“跳一跳摘果子”的状态，即使学生感到负荷满，有适当的紧张感，又使学生觉得压力不太大，问题可以解决，从而激发学生的求知欲，经过他们自己主动积极的探索而获取知识、发展能力。

（三）由学生的数学学习规律决定的要求

辩证唯物主义认为，人们掌握知识的过程是一个能动的反映过程，同样的，学生的数学学习过程也是一个能动的反映过程。只有当教学符合学生的学习规律时，才能充分调动学生的主观能动性，使他们通过自己积极主动的自我活动来达到学习目的。因此，启发式数学教学必须符合学生数学学习规律的要求。

学生数学学习过程有如下特点：

第一，学生的数学学习过程是一个数学知识的“再创造”过程。

从学生的角度来说，要学习的数学知识是一种未知世界，因此，数学学习过程是一个数学知识的“发现”过程。但是，由于数学知识是人类已经认识到了的知识，有历史的经验教训可以借鉴，因此学生可以凭着这种经验教训而少走一些不必要的弯路，通过相对简捷的途径去学习它、掌握它。另外，由于第一次发现过程的历史条件已经不存在，教学时间也有限制，因此，学生不可能（也不必要）重复漫长的第一次发现过程，学生的数学学习只能是一个“再发现”的过程。

由于学生认知水平的限制，他们不可能独立地完成“再发

现”过程，而必须通过教师的启发引导。所以，在启发式数学教学中，教师应该为“再发现”创造条件，对第一次发现过程进行“缩短”，即将第一次发现过程进行裁剪，使之变成一条“捷径”；“平坡”，即降低发现的难度，使之与学生的现有发展水平相适应；“精简”，即减少发现过程的弯路，使学生能大致经历数学家获得数学发现时的思维过程，在一种自然、主动的状态下完成“再发现”过程。

第二，学生的数学学习是从理论或间接经验到实践，再由实践上升到理论的过程。

学生的数学学习是从理论或间接经验开始的，然后在教师的帮助下，把这种理论或间接经验与自己已有的经验（包括过去已经学过的知识和日常生活经验）进行同化，经过一定的实践（模型操作、观察、实验、做数学习题、参加社会实践等），使之内化为他们自己内部的智力操作方式，从而上升为理性认识。当然，这里的“从理论到实践”并不是由认识到实践的飞跃，这时的理论对学生来说并不是他的理性认识，学生对理论所反映的客观对象的各种性质还没有掌握，不过，这一理论可以成为学生学习的向导；只有“从实践上升到理论”中的理论，才是学生的理性认识，这时的理论对学生来说是一种具体的、丰富的理论，学生对理论所反映的客观对象的各种性质也已经基本把握。

数学学习的这一特点要求教师在启发式数学教学中，努力为学生提供使所学的数学知识与已有的经验建立内部联系的实践机会。具体地说，教师在实施教学之前，要充分了解学生的学习基础，因为数学是一门逻辑性、系统性很强的学科，学习基础不够，教学将无法进行。例如，没有整式加法的知识，就不能学习整式的乘法，没有指数的概念就不能学习对数。由于学生认识水平的限制，他们对于教材中较多地反映了数学的逻辑结构而掩盖了数学思维活动过程的数学理论是难以独立地完成认识过程的。他们

对于数学理论背后所蕴涵的丰富的具体内容，或者头脑中比较缺乏，或者有一定的感性认识但不能很好地将之与所学的理论相联系，而对于被理论所掩盖的数学思维活动过程则更是难以把握。所以，在启发式数学教学中，教师要根据相应的数学知识的逻辑顺序，以及知识所蕴涵的数学思想、方法（这是初次接触数学新知识的学生所难以把握的，但是教师对它们应该心中有数），为学生提供适量的、具有典型意义的具体材料，让学生在数学理论知识的导向下，对这些材料进行充分的感知，并在此基础上再进行抽象概括，使新知识与已有的数学知识经验建立起内在联系，成为一个有机的知识整体，达到对数学理论的理性认识。

数学教学活动应该建立在学生的全部心理活动的基础上。只有在学生的全部心理活动都积极地投入到数学教学中来时，数学教学的进行才能卓有成效。心理学的研究告诉我们，使学生的全部心理活动都积极地投入到数学教学中的实质就是要充分发挥学生的智力因素与非智力因素的积极性。但是，学生的智力本身是无所谓积极性的，它的积极性来自非智力因素。所以，只有当学生的非智力因素（由动机、兴趣、情感、意志、性格等组成）参与到认知活动中来后，智力才会真正地发挥作用。

因此，在启发式数学教学中，教师应当采取切实有效的措施，努力调动和发挥学生的非智力因素的积极性。教师应该根据学生的现有认知发展水平、数学知识之间的逻辑联系，创设一定的数学教学情境，以引起学生认知的内部矛盾冲突，从而激发学生的好奇心和学习兴趣，引起学生的学习动机，使他们兴趣盎然地投入学习。当然，这种矛盾冲突不但要使学生能够意识到，而且要使他们感到经过自己的努力可以解决这种矛盾冲突。教师应该鼓励学生通过自己积极主动的思维活动去获取知识，并且在思考方向、思考方法、思维策略上加以适当的点拨，使学生真正经过自己的努力，克服学习中的困难而达到学习目的，让学生有施展自

己才华的充分机会，使他们看到自己在数学方面的长处，看到自己坚持不懈地努力的效果，从而培养学生的自信心、意志力和对数学的情感；教师要为学生创造一种适合于学生身心发展水平的、有利于学生求异创新的良好学习环境，以利于培养学生的坚韧不拔、勇于创新的优秀品质，让学生能经常得到成功的体验，感受到学习数学是一种精神享受，以利于培养学生的数学学习兴趣和情感。教师还可以利用数学发展的历史、数学在现代社会发展中的地位和作用等来激发学生学习数学的兴趣。

（四）由数学教学过程的特征决定的要求

数学教学过程是学生在教师的主导下，通过能动的数学思维活动，对数学教材进行学习的过程。在这一过程中，包含着教师与学生、教师与教材、学生与教材等一系列矛盾，这些矛盾的相互制约、相互联系的运动就构成了教学过程的发展。其中，学生与教材的矛盾是教学过程的主要矛盾，集中表现在学生的数学思维活动过程与数学知识所反映的数学思维过程之间的矛盾上。辩证唯物主义告诉我们，矛盾的转化，外因是条件，内因是根据，外因通过内因而起作用。所以，教师只有根据学生的内因进行教学，才能真正促成教学过程的主要矛盾的转化。由此，在启发式数学教学中，教师必须根据学生的内因（主要有学生的学习动机、已有的知识基础、数学思维水平、数学能力等），给以适宜的条件，启发学生的内因发生变化，使学生真正掌握知识，而不是把知识强加给学生，让学生死记硬背。要注意到数学教材的抽象性特点，认真分析知识所反映的数学思维过程，分析和把握学生的数学思维过程，并以这两个过程为依据，设置适当的教学情境，使这两个过程协调同步地进行，使学生在解决这两个过程之间的矛盾的过程中去认识教材、掌握知识、发展思维和智力。

以上从理论上对启发式数学教学的基本要求作了探讨。我们认为，数学教学中确立启发式教学思想，是时代发展的迫切需要，

是素质教育对数学教育工作者提出的迫切要求。要使数学教学为培养学生的适应现代社会生活环境的健全个性服务，就必须实行启发式；要使学生通过数学学习而培养创造精神和创造力，就必须实行启发式。因此，从理论的高度对启发式进行重新认识有非常重要的意义，特别是在当前“应试教育”向“素质教育”转轨的形势下，认真研究启发式理论，领会启发式教学的精神实质，更加有其深刻的现实意义。我们认为，结合数学学科的特点，理解启发式的内涵，掌握启发式的内在规律，并用以指导数学教学实践，是数学教学中贯彻素质教育思想的最好体现。

三　启发式数学教学的几个关键

现代数学教学的基本特征是确立和尊重学生的主体地位，强调发挥学生的主观能动性，引导学生通过自己的活动来获取知识，从而达到培养能力、发展智力的目的，使教学促进学生的全面、和谐的发展。但是，由于学生处于身心发展阶段，他们的数学知识水平不高，认识能力不强，对数学学习的规律也掌握得不够，学习中的自我调节、自我控制能力也较弱，因此，教学中学生主体作用的发挥并不能成为学生自己的自觉行动，而必须通过教师切实有效的诱导启发。下面我们将根据前面对启发式数学教学的基本要求的认识，讨论一下贯彻启发式教学思想所应该把握好的几个关键。

（一）为学生提供学有成效的数学知识结构

从认知方面来说，数学教学的中心任务就是要塑造学生的良好的数学认知结构，使之具有不断吸收新数学知识的能力和知识的自我生成能力。根据奥苏伯尔的观点，良好的认知结构具有三个特征：第一，可利用性——当学生面对新的学习时，他的认知结构中具有适当的、能够起固定作用的观念可以利用；第二，可辨别性——当已有的认知结构同化新知识时，新旧观念的异同点

可以清晰地辨别；第三，稳定性——已有的起固定作用的观念在认知结构中是牢固稳定的。由于学生的认知结构是由数学知识结构“内化”而来的，因此，塑造良好的数学认知结构的“物质基础”就是有效的数学知识结构。

关于数学知识结构的组织，奥苏伯尔提出了两个原则和先行组织者策略：

(1) 逐渐分化原则。按照这一原则，教材首先应该呈现这一学科最一般的、包容范围最广的那些观念，然后根据细节和具体项目逐渐加以分化。奥苏伯尔认为，这种呈现教材的顺序与人们自发地探究一个完全不熟悉的知识领域的自然顺序是一致的，与人们表征、组织与储存知识的方式也是吻合的。由此他提出了两个假设：(a) 下位学习比上位学习更容易；(b) 某一学科在学生认知结构中的组织是有层次性的：包容范围最广的那些观念位于这个结构的顶点，它们容纳概括性越来越低、分化程度越来越高的命题、概念和事实材料。因此，当学生的认知结构中具有包容范围较广的知识，而这些知识与新知识之间的关系又特别紧密，它们又可以被用来作为学习新知识的理想固着点时，学习和保持新知识的效果最好。据此，奥苏伯尔提出，在安排教学内容、计划教学程序时，应将每一个教学单元按包容程度由大到小的顺序，依次呈现，从而使新知识的教学有理想的固着点。按照逐渐分化的原则安排教学内容，一方面能使学生在学习任何新知识时都有理想的固着点，另一方面，新知识的习得又扩充、巩固和分化了学生已有的认知结构。当然，这是一种理想状态。现实中，由于各种原因而使教材难以按照这样的方式来编排，这时，奥苏伯尔提出了一个“先行组织者”策略来解决这一问题。

(2) 综合贯通原则。这一原则是指教师应帮助学生对自己已有认知结构中的相关观念进行重新组合。因为在教材里，有许多重叠、交叉的内容，它们之间的相关程度很高（有时是同一个问

题的两个方面，有时是同一内容的深化，或是某一个已知内容的特例或推广)，然而这些内容往往只能在教材中出现一次，它们之间的联系与区别只能由学生自己去认识，且教科书作者和教师往往也认为学生是可以完成这种认识的。奥苏伯尔指出，这种做法或想法在逻辑上可能是讲得通的，但在心理学上则肯定是站不住脚的。因为对认知结构中已有相关观念进行重新组合的过程，实际上是一个使现有认知结构进一步分化的过程。如果不使学生明确各个相关观念之间的关系，认识它们之间的主要异同，那么，所产生的后果将是非常严重的：(a)由不同的术语表示本质上相同的概念，不但导致了认知上的混乱，而且还鼓励了学生的机械学习；(b) 在相关课题之间设置了人为的障碍，从而使学生难以识别重要的共同特征，使学生失去了通过认识这些共同特征来进一步深刻理解相应课题的机会；(c) 使认知结构中已有的有关观念的"固着点"作用不能充分发挥；(d) 因为不能清楚而明确地识别那些表面上类似的概念之间的重大差异，学生往往把它们作为相同的概念加以记忆和保持。[①]

以"函数"知识的学习为例。事实上，函数知识与学生已经掌握的许多知识，如：代数式、方程、不等式，以及将要学习的知识，如曲线与方程、曲线与图形等都有非常紧密的联系，如："代数式的值"与"函数值"、"方程的解"与"函数值为0时的自变量的值"、"不等式的解"与"函数值在某一区间内时的自变量取值范围"以及"函数解析式"与"曲线的方程"、"函数图象"与"曲线的图形"等，这些概念之间的相互联系是非常紧密的，但是它们又不能等同。客观地说，要求教材对这些概念之间的异同作出详细区分是不尽合理的。但是，要真正掌握函数概念，学生又必须对上述问题有一个比较清晰的认识，对它们之间的异同有一

---

① 奥苏伯尔．教育心理学——认知观点．北京：人民教育出版社，1994，7.230

个比较深刻的理解。因此，教师在教学中就应该引导学生对上述概念进行辨析，也即要引导学生对所学知识进行“综合贯通”。例如，使学生认识到，“代数式中字母的取值范围”与“函数的定义域”在本质上是一致的；函数 $y=f(x)$ 可以看成是一类特殊的曲线的方程：$y-f(x)=0$，但是，从曲线的方程 $F(x,y)=0$ 却不一定能得到函数表达式：$y=f(x)$。这一点又可以从函数的图象与曲线的图形之间的关系来认识：y 轴的平行线与函数的图象最多只有一个交点，而与曲线的图形却不一定只有一个交点（两个或两个以上）。这样做的结果确实能使学生对已有概念和命题的认识更加清晰，加强了知识之间的联系性，使已有知识获得新的意义。

当教学内容无法按照纵向序列的形式，而只能按照横向并列的形式来组织时，综合贯通的原则同样适用。例如，代数与几何，它们之间并没有那种序列相依关系，也即代数知识的学习不以几何知识的掌握为前提，反之也然。尽管这些内容是互不依赖的，在逻辑上可以用完全独立的方式来组织它们，学生也可以在学习某一部分内容（例如代数）时不参考其他任何材料（例如几何），但在它们之间还是会发生许多认知上的相互作用。以横向并列的形式组织起来的教材，先前习得的知识对以后呈现的知识有定向和归属的作用。也正因为如此，人们能够用代数的手段来解决几何问题，又能够用几何的眼光来看待代数问题，从而产生出数形结合的思想，并发展起解析几何这样新的学科。

（3）先行组织者策略。为了促进学生更加有效地学习，防止知识之间的相互干扰，奥苏伯尔提出了一种策略：为学生提供“组织者”，即在呈现教学内容本身之前，先呈现一些密切相关的、包容范围广但又非常容易使人理解和记忆的引导性材料——先行组织者，其目的是帮助学生建立有意义学习的心向。先行组织者有助于使学生认识到，要有意义地学习新材料，就必须把它们与已有认知结构中那些特别相关的部分联系起来。在抽象性、概括

性和包容水平上，先行组织者比要学习的新材料更高一些，从而为将要进行的学习提供了一个框架或一条线索，使学生在学习具体、详细的材料时避免盲目性，对学习的进程做到心中有数。另一方面，先行组织者能增加要学习的新材料同认知结构之间的联系性，这一作用体现在两个方面：一是激活认知结构中已经具备的相关观念，从而使学生认识到它们之间的联系；二是使新材料与认知结构中那些类似观念之间的可辨别性增加。总之，先行组织者的主要功能就是在学生能够有意义地学习新知识之前，在他“已经掌握的知识”与“需要掌握的知识”之间架设起一座沟通它们的桥梁。

奥苏伯尔区分了两类组织者，一类是“说明性”组织者，其作用是为新知识提供适当的类属者，它与将要学习的材料之间构成上位关系。这种组织者在学习不太熟悉的材料的情况下使用，所用的语言是学生熟悉的、能够理解的。另一类是“比较性”组织者，其作用是指出新知识与认知结构中基本上类似的概念之间的异同，用来增加那些基本上不同，但又易使人误认为相似的新旧概念之间的可辨别性。由于学生在学校学习中对学习内容完全陌生的情况比较少，他们对新内容的理解往往似是而非，因此很容易发生新旧知识之间的混淆，比较性组织者可以提高新旧知识的可辨别性，从而保证学生获得精确知识。例如，在“排列组合”的教学中，两条基本原理非常重要，但是在应用时学生常常感到困惑，对什么时候用加法、什么时候用乘法难以把握。这时教师就可以采取提供比较性组织者的方法引导学生进行辨析：(a)加法原理对应着“分类”，乘法原理对应着“分步”；(b) 加法原理中的每一类方案中的任意一种方法都能完成这件事情，乘法原理中每一步中的任意一种方法只能完成该步骤，并不能完成这件事情；(c) 在具体应用时，先分类、后分步，类与类之间相加，步与步之间相乘。

组织者具有抽象性、概括性和包容性等特征，因而它对学习事实材料的作用较大而对学习抽象材料的作用较小。其原因可能是抽象材料本身已经具有内在的组织者。因此，教学中，先行组织者的作用，部分取决于学习材料本身是如何组织的。当学习材料本身已有内在组织者，其编排顺序又是逐渐分化的，那么就可以不用先行组织者。

近年来，心理学家在奥苏伯尔研究的基础上，发展了“组织者”的概念。组织者一般呈现在要学习的材料之前，但是也可以放在学习材料之后呈现。它既可以比原学习材料的抽象性、概括性更高，也可以比原学习材料更加具体。如在学习了排列、组合概念之后，给学生呈现“比较性”组织者：

题1 (1)全班 50 名同学每两个人握手一次，共握手多少次?(2) 全班 50 名同学互赠照片一张，共需照片多少张?

题2 (1) 从 2，3，5，7，11 中任意取两个数相乘，可得多少个不同的积? (2) 从 2，3，5，7，11 中任意取两个数相除，可得多少个商?

题3 6 个人去甲、乙、丙三个车间劳动。(1) 如甲去 1 人，乙去 2 人，丙去 3 人，分配方法有多少种?(2) 如一个车间去 1 人，一个车间去 2 人，一个车间去 3 人，分配方法有多少种?

这些问题作为“比较性”组织者，在学生学习排列组合概念之后让他们进行辨析，对于提高排列与组合之间的可辨别性，认清排列与组合之间的联系与区别，防止排列与组合的混淆，显然是十分有好处的。

根据上述理论，结合数学的学科特点，我们认为教师在组织数学知识结构时应该注意以下几个方面：

第一，重视揭示数学知识的本质特征及内在的逻辑联系，使知识具有整体性和系统性。

我们知道，学生的数学学习过程是以已有数学认知结构为基

础，通过同化或顺应，把新知识纳入到自己头脑中的数学认知结构中去的过程。在这一过程中必须使新的数学知识与已有数学认知结构中的有关观念建立起非人为的和实质性的联系，也就是要使学生真正理解数学知识的本质特征，掌握数学知识的内在逻辑联系性，从而使学得的知识具有整体性和系统性。当前的数学教学中存在的学生能够背诵数学定义、定理、法则、公式，能在熟悉的情境中应用相应的知识，但灵活、综合应用知识的能力不强，只要问题背景稍有变化，学生就感到束手无策的情况，究其原因就是学生还没有理解数学知识的本质特征和知识之间的内在联系性，因而就不懂得不同的术语实际上代表了本质上相同的概念，也看不清有关的课题或隐蔽的重要特征之间的共性，同样也不能区分相似概念之间的差异性，把不同概念当成相同概念来掌握。因此，启发式数学教学中，教师必须重视揭示数学知识的本质特征及其内在的逻辑联系，使知识具有整体性和系统性。

第二，以基本概念、基本原理为核心，“螺旋式”地安排知识，使学生能够反复地接触重要的基本概念和基本原理。

布鲁纳指出，用基本的、一般的观念来不断扩大和加深知识应当成为教育过程的核心。一个人“学到的观念越基本，几乎归结定义，则这些观念对新问题的适用性就越宽广。”因此，“一门课程在它的教学过程中，应反复地回到这些基本观念，以这些基本观念为基础，直至学生掌握了与这些观念相适应的完全形式的体系为止。”所以数学的基本概念、基本原理应当成为数学知识的核心。“螺旋式”地安排知识结构，是因为学生在数学学习过程中，对基本概念、基本原理的理解和掌握是一个从感性到理性、从具体到抽象、从模糊到清晰逐渐过渡的过程，这种理解不可能一次完成，需要不断地在新的高度上进行理解，并逐渐地把这种理解推向深入。

值得指出的是，新的教学内容中所包含的基本原理在很多情

况下是比较隐蔽的，学生自己一般不太容易发现，因此需要教师有意识地引导学生进行认识。这种引导可以在把特殊问题赋予一般意义的过程中进行，也可以在从一般原理的高度来认识新问题的过程中完成（实际上是认识的两个基本过程，即从特殊到一般和从一般到特殊）。因此，在启发式数学教学中，教师应当时刻注意引导学生从一般原理的高度去认识新知识（特殊问题推广到一般原理），要引导学生找出新旧知识在一般原理上的一致性，指导学生将具体知识归纳为一般原理，使知识具有广泛的迁移性。

第三，置数学的观念、思想和方法于数学知识结构的中心地位。

数学观念、思想和方法是数学科学的重要组成成分之一，是数学科学的“灵魂”，在促进学生的发展中具有决定性作用。首先，数学观念、思想和方法是学生获得数学知识的主观手段，学生掌握了它便能更加透彻地理解数学知识，并能自我生成数学知识；其次，数学思想和方法作为思维方式和行为方式，具有很大的智力价值，学生一旦把它们内化为自己的思维和行为方式，就能获得智力发展；第三，数学观念、思想和方法的学习是培养学生的创造精神和创造力的有效途径。

从数学发展的历史来看，人们从实践以及数学本身的研究中发现问题，通过对问题中包含的各种因素之间关系或联系方式的认识而产生解决问题的思想，再根据这个思想去寻找解决问题的方法。经过若干次这样的过程而获得问题的解决。然后，数学家们将那些正确的、使问题获得解决的思想、方法进行提炼、归纳，抽象概括为数学的概念、定理、法则等。所以说，数学的概念、原理是正确的数学思想、方法的载体，数学的思想、方法隐含在数学概念、原理之中。数学教科书（数学著作）是以定义、概念、定理、法则、公式等为要素的逻辑体系，数学思想、方法隐含其中，这一经过归纳概括的逻辑体系掩盖了数学思维的真实过程，学生

所看到的只是数学研究的结果。教学实践表明，让学生自己独立地从教材中揭露这些思想、方法是非常困难的，换句话说，数学思想方法的掌握必须在教师的启发引导下，通过学生的自主活动才能实现。因此，教师在课堂教学中为学生安排恰当的教学情境，以暴露数学思维活动的真实过程，使学生能切实体验到数学思想、方法的意义和作用是非常重要的。教师应当努力把知识教学提高到思想、方法教学的层次水平上，要针对具体内容研究设置教学情境的方法，以展示数学知识的发生发展过程，反映数学知识之间在数学思想、方法上的继承性和发展性，为学生提供一个包含数学思想、方法的数学知识结构体系，以利于学生建立起完整的数学认知结构。

（二）全面准确地把握学生的现有数学认知结构

教学的一个最重要的出发点是学生已经知道了什么。学生的现有数学认知结构是启发式数学教学的出发点。

知识的学习过程是以文字或其他符号表征的意义同学生已有认知结构中的相关观念（包括表象、概念和命题）相联系并产生相互作用以后，转化为个体意义的过程。学会知识的含义是习得“符号表征的意义”。由于不同学生的已有认知结构各不相同，因此，同样的知识——它是被人类所普遍承认和接受的、具有统一定义的成果，不同学生对它的理解深度和广度是不一样的。如果把学生习得的意义称为心理意义，把知识所反映的人类共同认识的结果称为逻辑意义，那么，知识学习过程就是知识的逻辑意义与学生已有认知结构中的相应观念相互作用，从而产生心理意义的过程。

数学知识的学习是以有意义接受学习为主、辅之以发现学习的过程。在接受学习中，所学的内容是以确定的方式呈现给学生的，完成学习任务并不需要学生的独立发现。学生只要将相应的数学知识内化到已有数学认知结构中，以便这些知识在今后的学

习中发挥作用。这里所说的内化是指新的数学知识与学生已有数学认知结构经过相互作用而产生心理意义的过程。在发现学习中，学生必须首先独立发现要学习的主要内容，然后才能对相应的内容进行内化。因此，发现学习的第一阶段有一个与接受学习完全不同的过程。

心理学家认为，有意义学习的心理机制是同化，产生有意义学习的条件，第一是所学习的材料本身有逻辑意义，第二是学习者要具备有意义学习的心向，第三是学习者认知结构中要具有可以用来同化新观念的相关观念，以便使新观念与已有认知结构建立起非人为的、实质性的联系。其中，学生已有认知结构的实质内容和它的组织特点是影响新的有意义学习的最重要条件。因此，数学教学中，了解学生现有数学认知结构的状况是教师的一项非常重要的工作。

了解学生现有认知结构的状况，有以下工作要做：

（1）了解学生现有数学认知结构中是否具有足够的、学习新材料所需要的相关观念，没有的要补充，学过但可能遗忘的要复习。值得强调的是，教师应该重视了解学生习得的日常概念和非正规学习概念，因为学生往往利用这些概念来理解新概念。例如，学习“垂直”这一概念，由于受“与地面垂直”这一日常概念的影响，学生往往认为“⊥”是垂直关系，而“　　”与“⤫”都不是垂直关系。日常概念和非正规学习概念与教学内容一致时可以利用，不一致时应该纠正。

(2)了解学生是否具备有关的操作方式。操作方式不具备，只有一些不能建立起相互联系的数学知识要素，也不能用来同化新知识。因此，教师在检查学生的认知结构时，最好采用“……为什么?”的问题来提问（或通过解答有关数学题)，而不要用“……是什么?”或“什么叫……?”之类的方式提问。

(3)分析新材料与已有数学认知结构中相关观念间的关系，这

是非常重要的，因为关系不同，其同化模式也不同，而教师必须根据不同的同化模式采取不同的教学策略。

新的学习材料与学生已有数学认知结构之间可以构成下列几种关系：

（A）下位关系。当新学习的知识从属于学生数学认知结构中已有的、包容范围较广的知识时，构成下位关系。这是新知识与学生已有认知结构之间的一种最为普遍的关系。下位关系又可以分为派生下位关系和相关下位关系。

知识的派生下位关系是指新的知识仅仅是学生已有的、包容范围较广的知识的一个例证，或是能从已有命题中直接派生出来。显然，这种新知识的本质属性与已有知识的本质属性是一致的。

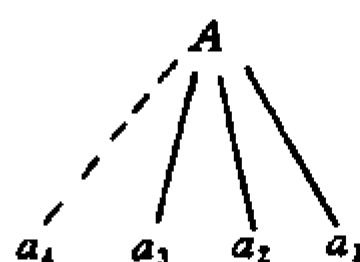


图 1.2.1

相应于派生下位关系，出现派生下位学习，其一般模式如图 1.2.1。其中，a_1，a_2，a_3，…表示已有知识，a_4 表示要学习的新知识。例如，当学生学习了“不在同一直线上的三个点确定一个平面”这一公理以后，接着学习“两条相交直线确定一个平面”、“一条直线和直线外的一个点确定一个平面”和“两条平行直线确定一个平面”等三条推论，就属派生下位学习。这些推论可以直接从公理和学生已掌握的平面几何知识派生出来，因此，学习起来比较容易。一般的，作为推论，与已有公理、定理、公式等都构成派生下位关系。

在派生下位关系知识的教学中，教学目的是使学生获得 a_4，从认知因素看，学习的内部条件是学生已经具备同化 a_4 的上位观念 A（A 是概括了 a_1，a_2，a_3，…以后获得的），并且 A 本身是牢固而清晰的。例如，高中《代数》中三角函数这一章的内容，先让学生学习三角函数的定义，然后再根据定义推导出同角三角函数的基本关系式、各三角函数的诱导公式等，就属于派生下位学

习；而在获得两角和的余弦公式以后，再学习两角差的余弦以及两角和与两角差的正弦、正切、各三角函数的倍角公式和半角公式等，也属于派生下位学习。所以，教学中，教师首先要使学生建立起牢固、清晰的三角函数的有关观念，然后启发学生“举一反三”，因为这时的“一”（三角函数的有关观念）是上位的，具有概括性、包容性和广泛的迁移性。当然，从这一同化模式中我们应该注意到，要“举一反三”必须先“举三反一”，要让学生有机会独立自主地抽象下位观念 a_1，a_2，a_3，…的共同特征，并概括到上位观念 A 中去。而在学习新知识 a_4 时，又要引导学生回到上位观念 A 当中去，从而强化上位观念，使其更加清晰、牢固。所谓的在知识学习中要“经常地回到定义去”，就是这个意思。

知识的相关下位关系是指新的知识是学生已有知识的扩展、修正或限定，并使已有知识得到精确化。从逻辑的角度来说，这时的新知识的内涵包含了已有知识的内涵，相应的，新知识的外延是已有知识的外延的子集。相应于这种关系，出现相关下位学习，其一般模式如图 1.2.2。其中，X 以及 U，V，W，…代表已有知识，Y 表示要学习的新知识。例如，学生已知“三角形”这个概念的意义，通过“有两条边相等的三角形叫等腰三角形”来界定等腰三角形。这时，通过对“三角形”予以限定，产生了“等腰三角形”这一概念。再如，学生在掌握“函数”的一般定义、性质以后，学习具体的函数：幂函数、指数函数、对数函数、三角函数等。已有的（一般化的）函数知识是上位的，具体的函数是下位的。具体的函数不能从已有函数知识中派生出来，但是两者之间存在着隶属关系。这种新旧知识相互作用的结果是已有上位观念发生部分质变，学生通过区分新旧知识的异同而理解新知识：一般化的函数知识指导学生去讨论具体的函数性质，而

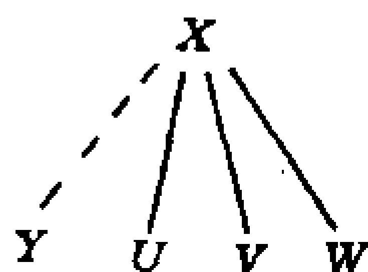


图 1.2.2

具体函数的学习不但加深了对函数概念的理解，而且也扩充了函数的内容。

从上述两种下位关系的模式中可以看到，这时的内部学习条件是学生认知结构中具有相应的上位观念和一定的下位知识（作为学习新知识的一种具体经验），外部条件是教科书或教师呈现的新知识。学习过程主要是区分新旧知识的异同。事实上，中学数学教材中，构成下位关系的知识是大量的，因此，下位学习也是非常普遍的（比上位学习更加频繁）。

（B）上位关系。当要学习的新知识比已有知识的概括程度更高、包容范围更广，可以把一系列已有知识包容其中时，新旧知识之间便构成一种上位关系，这时的学习就称为上位学习。其一般模式如图 1.2.3 所示。其中，a_1，a_2，a_3，…分别表示下位观念，可以是一个类别或一条原理的具体例子。虚线上方的字母 A 表示上位观念，可以是一个概念、一条原理或一个公式等。左面的字母 A 表示外部条件，可以是书本上的结论或教师的概括。显然，这一学习过程是一个从个别到一般的过程，学生必须通过分析、综合、抽象和概括等思维过程，才能获得新的上位知识的意义。学习的内部条件是学生的认知结构中必须具备相应的下位概念，外部条件是教师或教科书所呈现的结论或反馈的信息。例如，高中一年级学生学习映射概念时，教科书中先给出一些学生熟悉的对应关系的实例（如图 1.2.4），并具体阐述各个对应的特点。在此基础上，要求学生观察图 1.2.4（2），（3），（4），并抽象出它们的共同特征。一旦学生获得了这一共同特征，那么，学生也就获得了映射的定义。显然，在上位学习过程中，关键是从下位观念 a_1，a_2，a_3，…中抽象出它们的共同特征，而这也正是上位学习的难点所在。例如上例中，要抽象概

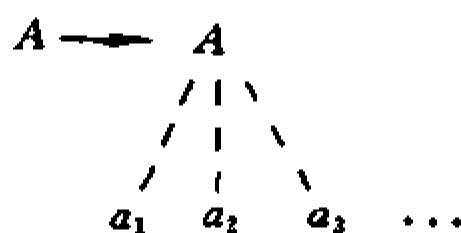


图 1.2.3

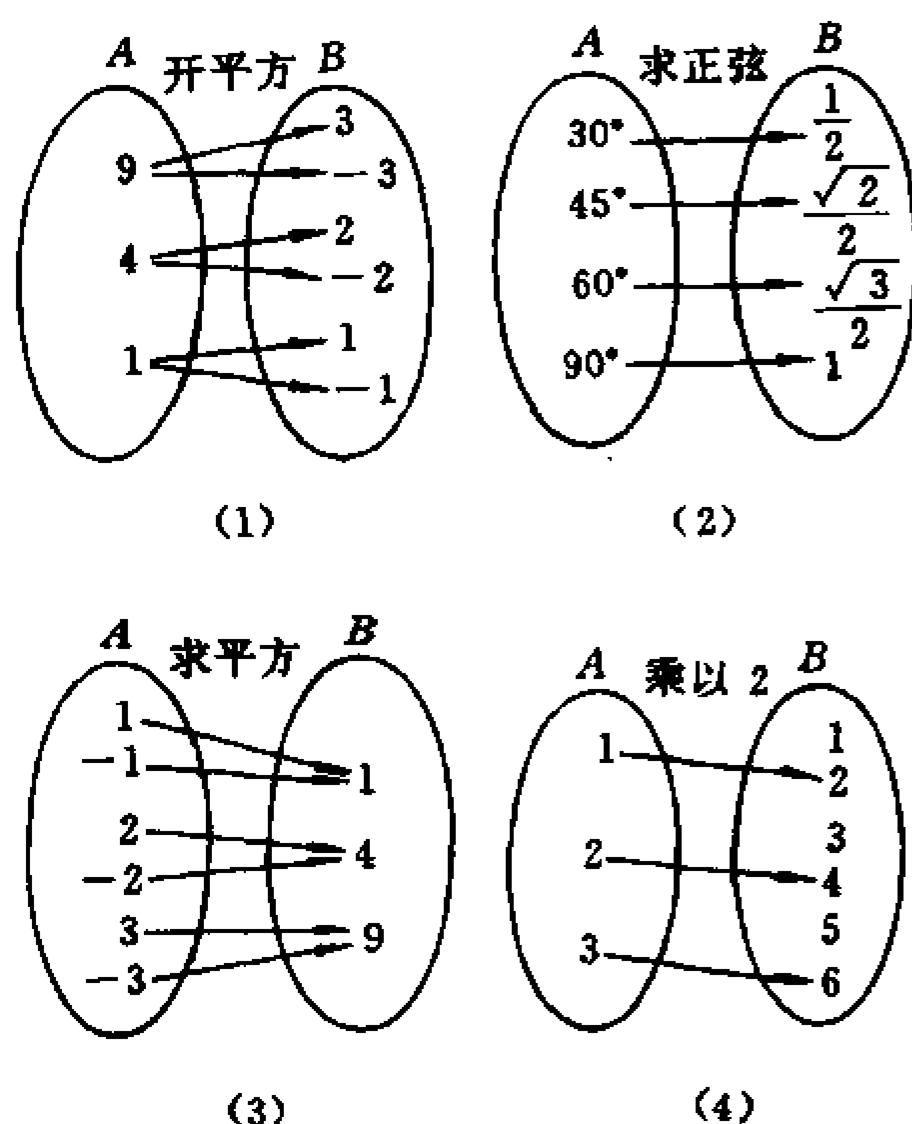


图 1.2.4

括出映射的特点：集合 A 中的任意一个元素，在集合 B 中都有唯一的元素与之对应，对学生来说并不是一件容易的事情。我们认为，在上位学习中，教师一方面要设法唤起学生已有的有关观念，从学生在日常生活中建立的观念中找出 a_1，a_2，a_3，…，还要为学生提供一些典型的事例（其中应包括学生还没有了解的或重要但容易被学生忽视的例子），作为同化 A 的基础。需要注意的是，所举的 a_1，a_2，a_3，…在数量上要恰当，要具有典型性（包括 A 的各种变式）。同时还应该帮助学生分析每一个下位观念的特点，通过学生自己对它们的分析、归纳、抽象、概括等思维活动，教师再在概括的方向上予以指导，让学生从中概括出 A 的本质特征。另外，在有条件时，教师应引导学生将新获得的上位观念 A 纳入到

更上位的观念中去，达到不断分化、综合贯通的目的。例如，学生建立了不等式的有关观念后，教师应该引导学生将不等式与方程（即等式）作比较，找到它们的共同点（都是关于未知数取值情况的问题），将它们纳入到函数的观念中去，使学生认识到可以用函数来统帅不等式、方程的有关观念；同时，又要引导学生比较不等式与方程的不同点，发现不等式中符号问题的重要性，从而既使不等式的有关观念更加清晰，又使函数、方程的有关观念得到深化。

(C)并列结合关系。如果新旧知识之间既不产生下位关系，又不产生上位关系，但新知识是由已有认知结构中某些观念的合理组合而构成的，那么新旧知识之间会产生并列结合关系。这时的学习称为并列结合学习。其一般模式如图1.2.5所示。其中，A表示新知识，B，C，D，…表示学生认知结构中已有的知识。例如，数学中数与形之间的关系，一般数学思想方法与具体问题的解决，就常常表现为并列结合关系。通过并列结合学习，学生能够从貌似无关的两个事物中发现它们某些共同的关键特征，从而获得对知识的一种全新理解，有时甚至能开辟一个新的研究领域。因此，并列结合学习需要学生有较强的创造力。

$A \to B - C - D$

图1.2.5

（三）使学生明确学习目标，激发他们的学习主动性

启发式教学是完整的人的教育，其实质是要发挥学生的主体作用，启发学生通过自己积极主动的思维活动去获取知识，发展思维能力，培养智力。因此，使学生明确学习目标，激发他们的学习主动性，使他们主动地参与到教学活动中来，是由启发式教学本身所决定的。

我们知道，学生的学习活动也是一种人类认识活动，因此，学生的学习必须经过实践这一环节。从学生掌握数学概念的进程来看，他们首先接触到概念的定义，经过一定的认识活动后“确

立”起抽象性的概念，这里的“确立”实际上只是将概念记住，在头脑中留下记忆的痕迹，而对于概念所反映的客观事物的各方面性质并没有把握住。因此，学生必须通过把抽象概念上升到具体概念的实践才能真正掌握概念。他们需要从各个侧面去认识概念，把握概念的多样性；在此基础上，他们又必须寻找把多样性统一起来的中间环节，从而认识其统一性；然后，再将这种已经认识到其丰富内涵的个别概念纳入到概念系统中去，达到对概念的理性认识。由此可知，学生学习数学概念，每时每刻都离不开其自身的主动实践。

其次，从数学研究来看，美国数学家、数学教育家克莱因 M 指出，研究数学的动力，一是为了解决因社会需要而直接提出的问题，以提供自然现象的合理结构，二是为了解决纯智力挑战，三是对美的追求（这是最主要的动力），而获得这种动力的唯一源泉就是数学家们自身的实践。由于学生学习数学的过程与数学家研究数学的过程具有很大程度的相似性，因此，我们可以认为，学生学习数学的动力只能是他自己的主动实践。

再次，从心理学角度来看，学生形成概括的过程中，非常重要的一条原则是知识和动作的统一，熟练记忆现成知识的过程并不能有效地促进人的发展，人的发展只有在个体亲自参加获取知识的实践中进行独立自主的活动才能实现。

综上所述，学生自身的实践活动是学生数学学习的关键。因此，教师必须注意激发学生学习的主动性，设法引导他们“卷入”到教学活动中来，而要做到这一点，又必须使学生明确数学学习目标。学生知道自己的学习进程，知道自己的学习与目标之间的差距，目前的学习哪些是肯定的、哪些是需要改进的，等等，都是他们掌握学习主动权的条件。启发式数学教学要发挥学生的主体作用，就必须使学生对自己的学习进程“心中有数”。

启发式教学不是教师“启”、学生“发”，而是学生自身积极

主动的活动过程。这与对启发式教学的某些传统理解是不同的。过去，很多教师认为把所教学的内容分割成一系列小问题，通过让学生回答这些问题来达到教学目的的做法就是启发式教学。在这样的教学中，学生虽然在回答问题时也要有些思考，但这种回答是不需要经过太多的努力就能做到的，而且教师设计的问题进程与学生的思维进程往往不相吻合，因此学生只能被动地跟着提问走，他们的思维活动并没有被真正地激发起来，学生的主观能动性也就得不到真正的发挥。显然，这样的教学与启发式的本质涵义是相去甚远的。

事实上，启发式思想指导下的数学课堂教学是教师与学生共同参与、相互作用、创造性地实现教学目标的过程，这一过程本身是具有生成新因素的能力的。在启发式教学思想指导下设计的问题能够调动起学生自己的经验、意向和创造力，通过发现、选择或重组等多种过程形成答案。这与前面的问题设计目的是完全不同的：前者的教师是“木偶的操纵者”，学生按照规定的路线走；后者则表现出教师重视学生主动获取、形成、发现知识的过程，这是一个真正关注人的发展的教学设计，它既能充分体现教师的创造性，又能为学生在教学过程中发挥创造性提供条件；它注意到学生之间的个体差异（包括认知的和非认知的），能够为每个学生提供主动积极活动的保证；它能够促使课堂中多方向、多类型的信息交流，并能使学生对自己的学习进程有明确的自我意识，对学习过程进行积极的自我调控；它能形成师生之间及时的信息反馈。总之，启发式数学教学能够使教师根据教学进程中的具体情况采取灵活的行动，使学生创造性地进行学习，发展他们的创造能力。

（四）为学生提供思维策略的指导

数学教学是学生在教师的指导下，通过自己的数学思维活动，学习数学家思维活动的成果，发展数学思维能力和创造力的过程。

数学家的思维活动蕴涵在数学知识内，渗透在教材中，学生通过自己的思维活动去领悟这些数学家的思维活动。教学过程中，教师要启发学生主动的思维活动，就必须分析教材所蕴涵的数学家的思维活动过程，把握学生的思维活动过程，以此为根据，安排适当的教学情境，激起这两个过程的矛盾冲突，教师通过思维策略的指导来调控和引导学生的思维活动进程，帮助学生解决思维矛盾冲突，总结思维规律、方法和技巧，达到学习目的。因此，教师对学生进行思维策略的指导是启发式数学教学的核心关键。

有关研究表明，数学思维策略与数学的基本思想方法是相互对应、相互联系的。因此，数学思维策略的指导可以从数学基本思想方法的传授和指导入手。例如，教师可以在以下几个方面进行指导：

（1）特殊化归为一般：由于事物的一般性是概括了事物的特殊性以后获得的，因而，通过对一般情形的研究而去处理特殊情形的思考方法是可行的。例如，把证明不等式的问题化归为考察函数的性质；解析几何中，借助于曲线系方程来确定符合某种条件的曲线方程等，都是这种思维策略的体现。

（2）一般化归为特殊：由于一般性寓于特殊性之中，并且特殊的事物往往显得简单、直观和具体，因此通过分析几个特例，从中寻求规律而得出一般的思考方法也是可行的。例如，多元问题化归为一元问题；空间问题化归为平面问题；“任意角”问题化归为“锐角”问题，等等。这些都是这种思维策略的体现。

（3）应用“关系映射反演原则”：这一原则的内涵非常丰富，它可以概括初等数学的许多方法和技巧，例如函数法、解析法、向量法、待定系数法、换元法、参数法等，这些都可以理解为这一原则的运用。

（4）对问题作分解组合：通过分解，可以认清待处理问题内部的各种制约关系，由这种关系所提供的线索可以找到解决问题

的方法；通过分解，可以搞清问题的外延，找到解决问题的突破口；通过组合，既可以使问题获得最后解决，又可以使我们对已解决的问题的关系结构进行重新搭配，从而加深对问题的认识，有时还有可能获得新的问题或新的解题思路。

学生通过对思想方法的反复学习和领悟，对数学思想方法的认识不断提高，可以逐渐内化为自己的行动方式，这时就可以使他们对自己的学习过程、解决问题的过程以及解题时所采用的数学方法的合理性等进行自觉的、及时的调控。一旦学生的数学思想方法具备了这样的水平，我们就可以说学生的思考达到了策略水平。因此，思维策略的指导是数学教学中发挥学生学习的主观能动性的重要保证，而促使学生把思考提高到策略水平，有助于提高学生的数学思维品质，使学习具有更加广泛的迁移性。所以，在数学教学中，教师应该通过对解决问题的具体思路和方法的指导，帮助学生在实践的基础上总结规律，以形成数学思维策略。

第三节　建构主义及其对数学教育的影响

一　建构主义简介

当今，教育心理学领域“正在发生着一场革命”，其标志是建构主义学习理论的兴起和得到普遍重视。

在心理学的发展史上，行为主义者的刺激——反应学习理论曾长期占据统治地位。他们把环境看作刺激，把伴随刺激的有机体行为看作反应，认为学习者的行为是他们对环境刺激所作出的反应，所有行为都是习得的。他们强调及时强化在学习中的价值，认为学习就是通过强化建立刺激与反应之间的联结。显然，行为主义者对学生在学习过程中的理解和心理过程是不重视的。

与行为主义者相反，认知心理学家认为不是环境引起个体的

行为反应，而是个体作用于环境。环境只是提供潜在的刺激，而这些刺激能否受到注意或被加工，则取决于个体内部的心理结构。因此，原有认知结构始终是影响当前学习的最重要因素。

建构主义是认知主义的进一步发展。皮亚杰可以看成是建构主义在现代的直接先驱，他的认识论可以被称为建构主义的。他认为，知识既不是客观的，也不是主观的，而是个体在与环境相互作用的过程中逐渐建构的结果。相应的，认识既不起源于主体，也不起源于客体，而是起源于主客体之间的相互作用。通常，个体在遇到新刺激时，总是试图用原有的认知结构去同化它，以求达到暂时的平衡；同化不成功时，个体则采取顺应的方法，即通过调节原有认知结构或新建认知结构，来得到新的平衡。同化与顺应之间的平衡，也就是认识上的适应，也就是人类智慧的实质所在。平衡过程调节个体与环境之间的相互作用，从而引起认知结构的一种新建构。

皮亚杰在50年代就已提出的建构思想并未受到重视。只是在70年代末，行为主义心理学的主导地位被认知心理学所取代，建构主义思想才得到重视并有了迅速的发展。而这其中，前苏联心理学家维果斯基为首的社会文化历史学派的观点在美国受到重视，对建构主义的发展起到了极大的推动作用。维果斯基强调活动和社会交往在人的高级心理机能发展中的作用，认为高级心理机能来源于外部动作的内化，这种内化可以通过教学、日常生活、游戏和劳动等各种活动来实现。另外，内在智力动作也外化为实际动作，而内化与外化的桥梁则是人的活动。当今建构主义认为，认识不是主体对于客观实在的简单、被动的反映，而是主体以自己已有知识经验为依托所进行的积极主动的建构过程。由于个体的经验以及对经验的信念不同，因而每个人都有自己对世界的独特理解。

建构主义重视已有知识经验、心理结构的作用，强调学习的

主动性、社会性和情景性，对学习和教学提出了许多新颖的观点。

二 建构主义的学习观

当今建构主义学习观是皮亚杰和布鲁纳的学习观的进一步发展。

皮亚杰认为，学习是一种能动的建构过程。在他看来，学习并不是个体积累越来越多的外部信息，而是学到越来越多的有关他们认识事物的程序，即建构了新的认知结构。这种新的认知结构不仅是原有认知结构的延续，而且是原有认知结构的改造和重组。在学习过程中，已有认知结构和主体对建构过程的积极参与非常重要。布鲁纳认为，学习包括三个几乎同时发生的过程：(1) 习得新信息——这种新信息常常是已有信息的替代或提炼；(2) 转换——这是一种处理知识以便使其适应新任务的过程。个体可以通过外推、内插、变换等方法，把知识整理成另一种形式，以便超越所给予的信息；(3) 评价——检查处理信息的方法是否适合于当前任务。他指出，学生不是被动的知识接受者，而是主动的信息加工者。为了促进学生的学习，提供信息是必要的，但是掌握这些信息本身并不是学习的目的，学习应该超越所给的信息。布鲁纳认为，学习的目的是要掌握学科的结构，而不是现成的正确答案，因此，学生学习的过程，即学生的思考过程或认知结构的重组过程是应当给予充分关注的。学生在掌握学科的基本结构的同时，还应掌握学习该学科的基本方法，其中发现方法和态度是最为重要的。

当今建构主义者发展了皮亚杰、布鲁纳的观点，认为：

(一) 学习是学习者主动地建构内部心理表征的过程

与皮亚杰、布鲁纳等一样，建构主义者十分重视学习者在学习过程中的主观能动性作用，认为人脑并不是被动地接受和记录输入的信息，而是主动地建构对信息的理解，学习者以已有认知

结构（包括已有的知识经验、认知策略、认知方式等）为基础，对信息进行主动选择、推理、判断，从而建构起关于事物及其过程的表征。当今建构主义者特别强调了在具体情景中形成的具体经验背景的作用，有少数人甚至走向极端，否定概念的抽象与概括的作用。

（二）学习过程是一个双向建构的活动过程

与皮亚杰、布鲁纳的理论一致，作为建构主义一支的“认知灵活性理论”认为，建构有两方面含义：第一，对新信息的理解是借助已有经验，超越所提供的新信息而建构的；第二，从已有认知结构中提取的相关信息也要按具体情况进行建构，而不是单纯的提取。不过，当今建构主义者更加强调改造和重组已有知识经验这一建构，他们认为，已有认知结构应该具有开放性，对概念的理解应有丰富的经验背景作支撑，这样，当人面临新情景时才能超越新信息，获得对新信息的创造性理解。

（三）学习者已有发展水平是学习的决定因素

皮亚杰认为，学习从属于发展，同样的学习情景对不同发展阶段的人会产生不同的效果。在此基础上，当今建构主义者进一步指出，处于同样发展水平的人对同一事物的理解也是不同的。事物的意义不能独立于主体而存在，必须通过主体的主动建构才能获得理解，因而，不同的人看到的是事物的不同方面，不存在对事物的唯一标准的理解。所以，学习者已有发展水平（包括认知的与非认知的）是学习的决定因素。

三　建构主义的教学观

基于对学习的上述理解，当今建构主义者提出了一系列新的教学思想。

（一）认知灵活性理论和随机通达教学

这一理论既反对让学生被动接受知识，强调要留给学生广阔

的建构空间，同时又强调概念的重要性，认为概念是提供建构理解的必备基础。

这一理论认为，学习可以分为两类：初级学习和高级学习。初级学习中，教师只要求学生通过练习和反馈而掌握一些重要的概念和事实；高级学习则要求学生把握概念的复杂性，能根据具体情况，改造和重组自己的知识经验，并用于建构问题解决的图式（这一建构过程往往要通过多个概念以及大量经验背景的共同作用才能实现）。

传统教学混淆了高级学习与初级学习之间的界限，将初级学习阶段的教学策略不合理地推向高级学习阶段的教学中，使教学过于简单化。例如，将事物从复杂的背景中隔离出来进行学习，忽视具体条件限制；将连续的过程简单地当成一个个阶段来处理；将整体分割为部分，忽视各部分之间的联系性等。这种简单化处理正是妨碍学习在具体情景中广泛而灵活迁移的主要原因。

基于对高级学习的理解，建构主义者提出了“随机通达教学”，认为对同一内容的学习要在不同时间多次进行，每次的情景都是经过改组的，分别针对知识的不同侧面，情景中要包括充分的变式，使概念与具体情景相联系。这样，在每一次教学中学生都能获得对知识的新的理解，从而使学生对概念形成多角度的理解，并与具体情景联系起来，形成背景性经验。显然，这一思想与皮亚杰的“认识的螺旋”及布鲁纳的训练多样性思想是一致的。

（二）自上而下的教学设计及知识结构的网络概念

传统的教学常常采用“自下而上”的教学设计。这种教学从基本知识技能出发，按知识的层次结构，从低级到高级逐渐展开。当今建构主义者认为，这种教学设计是使教学过于简单化的根源。他们提出了“自上而下”的教学设计路线，即教师首先提出整体性学习任务，选择与学生生活经验有关的真实问题，并提供理解和解决问题的相应工具；学生则要自己尝试着将整体任务分解为

子任务，自己发现完成各级任务所需的相应知识技能，并通过自己的思考或小组探讨，在掌握这些知识技能的基础上，使问题得到解决，完成学习任务。

另外，有的建构主义者认为，知识是围绕着关键概念的一种网络结构，它包括事实、概念、原理以及有关的条件知识、过程知识、观念思想等。学习可以从网络的任何部分开始，即教师既可以让学生从解决一个实际问题而开始学习，又可以从引导学生理解某一概念或原理而进入学习。教学不必要组成严格的直线型层次。

（三）情景性教学

与强调具体情景中形成的具体经验背景的作用相适应，建构主义者认为，学习应在与现实情景相类似的情景中发生，教学目标是解决学生在现实生活中遇到的问题，学习内容要选择真实性任务，并且不能对其作简单化处理。由于具体问题的解决往往涉及多个学科，因此，他们主张弱化学科界限，强化学科交叉。教学过程中，教师在课堂上展示与实际的问题解决相类似的探索过程，提供解决问题的原型，指导学生开展探索活动。另外，这种教学不需要独立于教学过程的测验，因为解决具体问题本身就已经反映了学习效果。

（四）支架式教学

为了处理好接受学习与发现学习的关系，建构主义者借用建筑行业的脚手架概念形象地提出了支架式教学这一教学模式：教师先为学生的学习搭建支架（教师对教学过程的管理、调控），使学生掌握、建构和内化所学的知识；然后逐渐撤去支架，把管理调控学习的任务转移给学生，直至最后让学生独立学习。显然，这种教学与指导发现法教学相类似，但它同时又强调了教师指导成分的逐渐减少，强调教学中教师与学生的地位的动态性。

另外，当今建构主义者还十分重视教师与学生、学生与学生

之间的社会性相互作用。由于每个人的经验背景不同，对同一事物有不同方面的理解，因此，通过合作与讨论，可以使学生完善对事物的理解，看清事物的各个方面。由于在讨论中学生要不断对自己的思考过程进行反思，对各种观念进行组织和重新组织，因此有利于学生的建构能力的提高。

四　对数学教育的启示

（一）充分尊重学生在教学中的主体地位

关于学生在教学中的主体地位问题，过去的教学理论从认识论角度进行了广泛探讨。建构主义理论为我们理解这一问题提供了新的视角。同一个认识对象，对不同人可以有不同的理解，甚至对同一个人也可以有不同理解，这种理解具有较强烈的个性色彩，从知识层次到知识的各个侧面，都存在着理解上的差异性。数学学习是学生在已有数学认知结构的基础上的建构活动，目的是要建构数学知识及其过程的表征，而不是对数学知识的直接翻版。而数学认知结构不是一个孤立的系统，它不仅包括数学学科方面的知识、经验，而且受到生活经验、其他学科知识经验的直接影响（即建构主义者所强调的具体的、非结构性知识的作用），因此，在数学学习中，学生会表现出各种不同的特点，对同一数学知识的理解会有不同侧面、深刻程度上的差异。所有这些都决定了数学教学必须尊重学生的主体地位，考虑每个学生的不同背景，从每个学生的当前实际出发进行教学，以便发挥每个学生的主观能动性。

（二）对数学教学任务的全面理解

我们认为，中学教育还是应该具有学科界限的，因为中学生关于各学科的基本概念并没有牢固地建立起来，这时如果以学科交叉的方式进行学习，学生将失去有效学习的基础，学习效果无法保障。但是，建构主义主张多学科联系的思想，发挥具体情景

中形成的非正式经验背景的作用的思想，对全面理解数学教学过程及其任务是有启发的。确实，数学教学过程除了涉及数学本学科的知识以外，还涉及学生在日常生活中建立起来的大量非正式经验（非科学概念），语文、物理、化学等其他学科的基本知识。例如，学生在数学学习过程中遇到的困难常常不是因为不具备必须的数学知识基础，而是因为语文知识的缺乏所造成的理解困难，这就说明语文知识在数学学习中的重要性。因此，数学教学中，教师除了要求学生掌握数学知识，培养学生的数学能力外，还要注意为学生弥补其他学科知识的缺陷，为学生提供有利于数学学习的具体的、经验性的背景材料（纠正与数学知识相矛盾的经验）。

（三）强调打好数学基础的重要性

数学学习活动是一个以学生已有的知识和经验（已有的认知结构）为基础的主动建构过程，高级学习是以初级学习为前提的，因此，打好数学基础对进一步的数学学习具有极其重要的意义。事实上，这与数学家学习、研究数学的经验也是一致的。数学家王元指出："不断抽象是数学的特点之一，……，学习数学时会不断碰到新的抽象概念，……，学习数学首先要弄清一个个概念，否则，脑子里难免是一盆浆糊。"因此，正如王梓坤先生所说的，"不论是学习数学或研究数学，都必须循序渐进，每前进一步都必须立脚稳固，这是数学方法中的一个显著特点，其他科学也要循序渐进，不过数学尤为如此。前头没有弄懂，切勿前进。有如登塔，只有一步一上，才能到达光辉的顶点。"

当然，循序渐进不是简单重复，而是一种螺旋上升。教师既要引导学生对数学知识进行多方位、多侧面的理解，又要及时地把学生的学习引向深入。

（四）重视与学生的生活实际、社会环境相联系，但必须注意数学本身的特点

数学教学应当结合现实中的具体情景，使学生形成背景性经

验。但是我们不赞成将现实情景原原本本地搬到课堂上的做法，像“情景性教学”之类的理想化教学模式并不适合于我国的教学实际，与数学学科的特点也有矛盾。

数学不同于社会科学和自然科学，“数学并非建立在对于真实事物或现象的直接抽象之上，而是一种抽象之上的抽象，也即是以先前思维活动的形式或结果作为直接的对象”。因此，数学带有明显的人的主体性“印记”。人类根据自己的生活、生产以及精神需要构建了数学，数学扎根于现实世界，以人类的生活、生产需要作为动力，但数学活动又带有强烈的主体性，而且，数学对象系统在一定意义上可以是“人为的”——数学对象的命名、定义、规则的选定等都可以是人为的，非欧几何就是这种“人为的”突出例证。当然，数学系统一旦建立起来，其对象就有了明确的定义，人们就只能依据相应的定义和明确的规则进行研究，而不能求助于直观。从数学的这种特性出发，数学教学就既要尊重“数学活动的主体性”，又要符合数学规律的客观性。

另外，人们通过研究发现，学生在抽象数学概念的心理表征上具有如下特点：(1) 直观形象性，即学生在对数学概念进行心理表征时，常常要借助于直观形象，这种直观形象主要来源于日常生活或关于这一概念的已有学习经验；(2) 不一致性，即学生关于抽象数学概念的心理表征往往有一定的内在矛盾性，特别是，通过数学学习所获得的形式定义往往与他先前关于这一概念的直观形象相矛盾（学生常常把直观形象中包含的非本质特征或个别特征当成数学概念的全部本质特征）。因此，数学教学中，教师首先应让学生通过对已有直观形象和经验的抽象、概括等主动的思维活动，理解和掌握相应的数学概念的形式定义；第二，学生在日常生活中建立起来的具体性经验与形式化的数学概念常常存在某种矛盾，因此，在强调把数学概念具体化到一定的实例中，与具体情景联系起来的同时，教师应利用这种矛盾来引起学生的认

知冲突，通过纠正以往的错误观念，对已有认知结构进行调整、扩充或重新组合，使相应的具体性经验升华为理性认识，从而准确理解数学概念的形式定义，建立起关于数学概念的恰当的心理表征。

这里，我们想对数学概念的形式定义与实质之间的关系作一说明。由以上对数学特性的理解可以看到，数学对象是明确定义的产物，数学建构活动具有明显的形式特性，数学概念是形式与实质高度统一的产物，因此，我们既不能离开数学概念的实质而空谈其形式，也不能避开数学概念的形式来认识其实质。当然，对于数学概念形式定义的意义（即数学概念的实质）的理解存在层次的差异、不同侧面的差异，也即处于不同年龄阶段、不同发展水平的学生对同一数学概念的理解的深刻性和全面性是不同的；由于经验背景的差异，处于同一发展水平的学生对同一数学概念的理解会有不同侧面的差异。因此，数学教师应根据学生的认知发展水平，向他们提出适当的理解数学形式定义的要求，即教师在向学生揭示数学概念、原理的实质时，应把握好适度性，循序渐进地把学生的认识引向本质；同时，要引导处于同一发展水平的学生进行合作学习，使他们相互了解彼此的见解，取长补短，查漏补缺，形成对数学概念的更加丰富的理解。

另外，数学教学中同时强调学生日常生活中建立起来的直观形象经验与数学概念形式定义两者的作用，也为我们正确认识数学教学联系现实生活，处理好数学教学中发展学生智力、培养学生思维能力（纯粹的智力训练）与培养学生解决实际问题能力之间的关系提供了理论依据。数学教学应注重联系实际，应培养学生解决实际问题的能力，但是，如前所述，数学与客观现实间有内在距离（因为数学对象的抽象性，数学活动是抽象之上的再抽象），所以我们不能（也不可能）过分强调数学教学与现实世界的直接联系。这样，在强调数学教学联系实际，强调“问题解决”重

要性的同时，还应注意这种联系的适度性，不能把“解决实际问题”庸俗化。另外要特别强调，与别的学科相比，数学教学在开启学生心智，培养学生思维能力（特别是抽象逻辑思维能力），提高学生内在素养等方面担负着更加重要的责任，“数学给予人们的不只是知识，更重要的是能力，这种能力包括直观思维、逻辑推理、精确计算和准确判断”（王梓坤）。因此，数学教学应该重视对学生进行纯粹的思维训练，这是我们在考虑加强数学教学与客观现实的联系性时所必须要牢记的。

（五）给学生的数学学习以适度的指导

由于认知发展水平的限制，学生的数学学习需要教师的指导。过去比较多地从“根据学生已有认知结构中的相应知识与新知识之间的矛盾，设置教学情景，以激发学生的认知冲突，从而引导学生进行主动学习，促使学生的思维发展”的角度对教师的指导作用进行阐述。依据建构主义的观点，教师与学生在教学中的关系是动态性的，因此，随着教学的发展，学生学习的逐步深入，教师应逐渐放手让学生自己进行独立的学习，减少指导，增加学习中的自主发现的成分。当然，“适度指导”的掌握与教师的教学经验直接相关，教学活动中，所谓“学的真谛在于‘悟’，教的秘诀在于‘度’”就是要求广大教师（特别是青年教师）在自己的教学实践中，不断总结教学经验，针对学生数学学习过程中的思维多样性和个体差异性，进行适当的指导，以使学生提高对知识的领悟能力。

以上我们介绍了当今建构主义在学习与教学方面的一些新见解，从中可以看到，建构主义在具体经验（直观形象）与抽象概念之间，强调了具体经验的重要性；在结构性与非结构性之间，强调了非结构性（强调问题的真实性，反对对问题作简单化处理），强调在具体情景的联系中进行学习的重要性。建构主义强调了学习过程是学生对知识的主动建构过程，在强调已有认知结构的重

要性时，指出了提取记忆系统中的信息也是一个根据具体情况进行建构的过程，使已有认知结构与新知识之间的相互作用过程更加清楚，从而使学生在教学中的主体地位更加明确。因此，建构主义的观点对于我们当前正在进行的教学改革是很有启发的，对当前教学中存在的种种弊端的批评也是切中要害的。但是，从中我们也不难发现，建构主义的学习理论更加适合于学习的高级阶段，忽视学校学习的累积性（接受性）而只强调主动建构（发现式）也是与学校学习的实际不相符的。因此，对于我们这样一个基础教育有待普及，师资水平有待提高的发展中国家来说，在学习这一理论时，一定要注意根据我国的实际情况，采取批判地借鉴、吸收的态度，不能照搬照抄。

第四节　创造力研究与数学的教和学

从建构主义的学习观和教学观中我们可以看出，当今认知心理学同样也非常重视创造力问题的研究。事实上，这也是与我国当前基础教育从应试教育向素质教育转轨中所提出的问题密切相关的。

在素质教育理论探索中，关于应该树立怎样的人才观的问题是热门话题之一。人们普遍认识到，人才既有共性，又有个性。关于共性，正如《中共中央关于教育体制改革的决定》中指出的，“应该有理想、有道德、有文化、有纪律，热爱社会主义祖国和社会主义事业，具有为国家富强和人民富裕而艰苦奋斗的献身精神，应该不断追求新知，具有实事求是、独立思考、勇于创造的科学精神”。素质教育就是要在实现这一共同要求的前提下，使每个人的兴趣和爱好获得发展，每个人的特殊才能得到培养，以实现每个人自己的理想，寓共性于个性之中，使共性与个性和谐发展，培养个性鲜明的创造型人才。

素质教育思想在强调基础教育的基础性、全体性、全面性的同时，更加注意到了个体性、发展性和未来性。人们普遍认为，要使上述人才观和培养目标在学校教育中真正得到落实，必须贯彻启发式的教学思想，充分重视和发挥学生的主体作用，使学生生动活泼地、主动地学习，在掌握知识的过程中使学生“学会学习”，培养学生的独立思考能力、创造的科学精神和探索新知识的能力，使学生在未来社会中具有更强的适应性和竞争力。

从以上论述不难看出，创造能力作为适应社会发展需要所必备的能力，受到越来越多的关注，已被确立为基础教育中必须着重培养的能力。数学，无论在社会建设和发展中，还是在人的素质培养中都有极其重要的作用，作为基础教育中教学时数最多的学科之一，又由于学科本身的特点，在创造力培养中发挥着独特的作用。下面我们想介绍一些创造力研究的新进展，并提出一些数学创造性能力培养的建议和策略。

一　创造力研究概述

从 1869 年英国心理学家高尔顿出版《遗传与天才》，第一次对“创造性”进行系统研究以来，各国心理学家对“创造性”的研究给予了充分关注，特别是近二十多年来，创造性思维的研究越来越受到重视，研究方法越来越多，对创造力的培养也被提到教育的议事日程上来。在此期间，出现了许多关于“创造力”的定义。概括起来，人们一般认为创造力的定义中至少应包括四种成分：(1) 创造性的主体；(2) 创造性的环境；(3) 创造性的过程；(4) 创造性的结果。心理学家们一般是按照上述四条路线，有侧重地对创造力进行研究。

对于创造力，心理学家主要从三个侧面进行研究。第一是对具有创造力的人的个性心理特征进行研究，有些研究者认为，个体对待自己和世界的动机、兴趣、态度等个性心理特征是影响创

造力的主要因素，有创造力的人在灵活程度、自信心、专心创新的程度、勤奋等方面都有杰出的表现；第二是对创造性的过程进行研究，这一方面以认知心理学关于“问题解决”的研究为代表。通过对问题解决过程的研究，区分出有创造力的人在问题表征、问题解决策略等方面的特点，以及诸如人的知识经验、注意、记忆、思维等心理过程对问题解决所产生的影响，并给出了一些重要的解决问题的策略（启发式策略）；第三是社会心理学的研究，目的是探索环境条件对人的创造力的影响。

随着认知心理学的发展，对创造性思维与认知过程及元认知能力的关系、创造性能力与已有知识经验（或已有认知结构）之间的关系、创造性思维策略及其训练以及创造力与认知风格、动机、环境等非认知因素之间的关系等的研究都有新的进展。

二　创造力研究的新进展

（一）创造力与认知过程

认知心理学家们认为，创造力来自于基本的认知过程，它不只是少数人才有的特殊技能（或能力）。每个人都具有创造的潜能，日常生活中，人们使用语言和形式概念的过程中就表现出一定的创造力；学生学习新知识，以新的方式运用知识解决一个问题等，也体现出一定的创造力。例如，小学生学习三角形的面积公式，通过动手操作等方式发现三角形与平行四边形之间的关系——平行四边形可看成是两个完全相同的三角形拼接而成的，再由平行四边形的面积公式推得三角形面积公式。这一过程中，“发现三角形与平行四边形的关系”就体现了小学生的创造力。认知心理学家认为，可以通过研究这样的基本过程来理解创造力。

在对基本的认知过程的研究中，以对“问题解决”及其过程的研究最有影响，最具代表性。认知心理学家把问题解决区分为创造性问题解决和常规性问题解决两类：要求发展新方法的问题

解决称为创造性问题解决，使用现成方法的问题解决称为常规问题解决。但是他们认为，两类问题解决的差别是相对的，可以把它们设想为一个连续体的两端，其间则有常规性与创造性的变化。这样，问题解决过程中一般都存在着创造性，无论是创造性问题解决过程还是常规性问题解决过程都包含了共同的成分。如认知心理学家纽厄尔（Newell A）和西蒙（Simon H）认为，任何问题解决过程，首先是理解这个问题，对它进行表征以形成问题空间，然后利用各种算子（如已有的知识经验、认知操作等）来改变问题的起始状态，经过各种中间状态，逐步达到目标状态，从而解决问题；海耶斯（Hayes）在 1989 年提出了问题解决是"辨明问题、表征问题、计划解答过程、执行计划、评价计划、评价解题过程"的系列过程。认知心理学家认为，对问题作怎样的表征，这种表征是否适宜，对问题解决有重大的直接影响，不同的表征形式也有不同的效果。一个人是否具有创造力主要表现在能否选择良好的问题表征上。例如，在解答问题：

"已知：a，b，c，A，B，C 都是正数，且 $a+A=b+B=c+C=1$，求证：$aB+bC+cA<1$。"时，很多人都感到困难很大。究其原因，主要是他们只在代数范围里对问题作出表征，而不能在几何范围里对问题作出表征。事实上，将问题作出几何表征如下：如图 1.4.1，在单位正三角形 PQR 的各边上分别取点 P'，Q'，R'，使 $PP'=A$，$P'Q=a$，$QQ'=B$，$Q'R=b$，$RR'=C$，$R'P=c$，则 $S_{\triangle P'QQ'}+S_{\triangle Q'RR'}+S_{\triangle R'PP'}<S_{\triangle PQR}$，易得 $aB+bC+cA<1$。

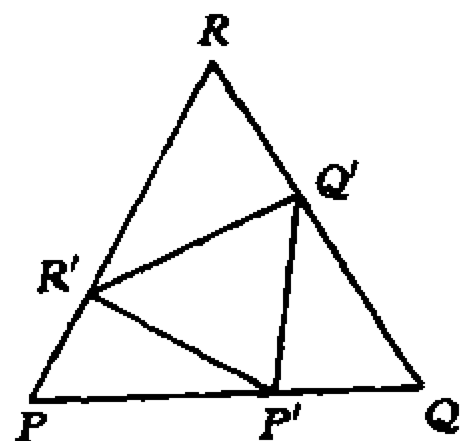


图 1.4.1

由以上表征过程我们可以看到，不同知识之间的联系在创造性地解决问题中的作用。事实上，具有创造力的人在解决问题的

过程中总是倾向于用独特的方式联结不同的概念、知识，从而对问题作出创造性的解答。在对概念的创造性联结和解释时，需要对概念重新进行心理表征，当联结极其丰富、复杂时，人们就不得不多次对概念进行重新表征，这时可能获得新颖独特的思维方式和问题解决方法。当然，其中还包括对新异方式、方法的分析推理和批判性的评价，以保证新异方式、方法的正确性。

（二）创造力与知识经验

丰富的知识经验是创造力的源泉。任何一个领域内的问题解决都会涉及到大量该领域的专门知识，离开了这些知识基础，问题解决就会成为一句空话，创造力也就成了无源之水。在一个领域内极富创造力的大科学家，如果不具备另一领域的专门知识，也不可能解决另一领域内的问题，所谓的“隔行如隔山”就是这个道理。人们已储存的知识经验可帮助选择有关的信息，引导人们提取相关的知识和方法，形成问题解决的策略。有关研究表明，个体的创造力与他具有的相关知识的数量及其性质和组织结构有极大的正相关。

然而，强调知识经验的重要性并不意味着有了知识经验就一定会有创造力。知识经验一方面是我们进行创造的基础，另一方面也可能束缚了我们的创造力，因为人们总喜欢用习惯的眼光来看待新事物，用自己熟悉的方法去处理新问题，而较少考虑新问题与过去经验的不同之处。因此，心理学家建议，在创造活动中，应尽量排除经验的束缚，走一条全新的道路。

另外，已有知识经验的组织特征也是影响创造力的一个重要因素。教师常常会碰到这样的情况：学生不仅具备解决问题所需的全部知识，也知道相应的解题方法，但仍是苦苦思索不得其解，略经指点却又恍然大悟。这说明学生头脑中虽然具有相应的知识经验，但却不知如何运用，其主要原因之一是学生头脑中的知识组织混乱、结构性差，运用时不能恰当表征。显然，如果我们头

脑中杂乱无章地堆积的知识越多，用到时提取就越困难，这时的知识反而不利于问题的解决，成了阻碍创造力发挥的因素。心理学家认为，知识的学习或表征，只有做到条件化、结构化、自动化和策略化，才能有效地用于创造性解决问题。

（三）创造力与元认知

元认知是最近一二十年出现的最新研究课题，心理学家越来越重视对它的研究。目前尚无元认知的公认定义，许多人将它解释为关于认知的认知，是个人对自己的认知加工过程的自我觉察、自我评价、自我调控。心理学家认为，既然创造力是一种认知过程，那么元认知就应该是它的基础并影响它。

为了明确元认知在问题解决和创造力中的基础作用，我们可以先分析一下问题解决过程。认知心理学家认为，问题解决过程一般可分为四个阶段：(1) 问题表征，问题解决者依据问题所包含的信息和已有的知识经验等已储存的信息对问题作出表征，这是一个主动建构的过程；(2) 确定问题解决策略，这一阶段中，问题解决者要选择用来改变问题起始状态的各种认知操作，并将它们组成序列（这里，如果问题复杂，涉及的认知操作多，则会给选择带来困难。到底选择哪些操作，将它们组成怎样的序列，都取决于问题解决者采取哪种问题解决策略）；(3) 执行策略，运用所选择的认知操作，改变问题的起始状态。使之接近并达到目标状态（在比较复杂的情况下，选定的策略并不一定能顺利实施，有时甚至无法实施）；(4) 评估策略，这里包括对策略是否适宜、当前状态是否接近目标、问题是否已获得解决等作出评估。在问题获得解决之前，对解题策略有效性的评估是极其重要的。通常，经过评估，对问题解决策略作出修正，有时甚至需要对问题的起始状态和目标状态作出重新表征，从而改变解题策略。

由此我们不难看出，元认知过程与认知过程并存，在确定目标、选择认知策略、使用系统的认知加工、监控和评价过程以及

对认知策略进行必要的修正（甚至改变）等过程中都发挥着“监察官”作用，对问题解决的质量有决定性影响。

（四）创造力与动机、态度

动机是唤起和推动创造行为的原动力，它具有引起创造行为的始动功能和指导、监控创造行为的功能；动机给创造活动的客体添加上一定的主观性，具有维持创造行为、达到创造目标的志向功能；动机使创造者只关注有关的刺激或诱因，忽视无关刺激或诱因，使创造者可以预计其行为结果；动机使主体对自己的反应加以组织和强化，从而使他自己的创造活动能顺利进行；动机还具有调节功能，它使主体随时修正或改变自己的创造活动，以便达到预定目标。

认知心理学家认为，内在动机（如好奇、求知欲、自我实现等）在创造力中具有最重要的决定意义，而外在动机（如赏罚、物质刺激或社会刺激等）则导致低创造力。当人们被活动本身的满意和挑战所激发，而不是被外在的压力所激发时，才表现得最有创造力。而内在动机则来自于认知不平衡。当人们面临某一问题而不能用自己熟悉的方法解决时，就会产生认知不平衡，这种不平衡会导致一种“紧张感”，为了消除这种感觉就会产生试图解决问题的动机。

良好的态度对成功地解决问题、发挥创造力是至关重要的。在创造过程中，遇到挫折和失败是必然的，具有正确态度的人在挫折和失败面前表现出很强的自信心；他们更重视理性的思考和推理，而不是乱猜；他们总是把精力集中在当前的问题上，而较少分心；他们有耐心和毅力，较少烦躁和厌腻；他们时刻都有一种寻找更佳思路和答案的心向，因而总不满足于已取得的成功。

（五）创造力与认知方式

认知方式是指认知活动中所偏好的、经常使用和习惯化了的态度和方式，是人的个性在认知过程中的表现。认知方式往往能

左右人的认知活动。心理学家认为，创造性的认知方式有如下特点：（1）感知敏锐，善于质疑，有很强的好奇心和观察力，注意力集中；（2）能调动各种感官全面客观地感知事物，存储丰富的表象，场独立性强；（3）思维流畅，记忆准确、广阔，信息存储方式有利于迅速产生连锁反应，善于把握事物的内在联系性，不追求唯一正确答案；（4）思维灵活，不受事物原有形象或功能的束缚，容忍模糊，注意力能适时转移；（5）宽容地对待各种设想，具有浪漫精神和超现实感；（6）敢于冒险，不怕失败，大胆创新；（7）富有想象力和幽默感，视觉表象丰富，能把两类相距很远的事物联系在一起。

认知方式是当前人格心理学的一个研究热点，把它与创造力联系起来，说明创造力不仅是思维、智力的一个成分，而且也与人格因素相关。一个人是否具有创造力，既受认知技能的影响，也受人格因素的制约。

（六）创造力与环境

我们这里所说的环境是指人与人之间所形成的社会环境。心理学家研究了社会因素对人的创造力的影响，他们认为，帮助者和榜样在创造力的发展中起着重要作用。许多具有创造力的、并且作出创造成绩的人都是在原有发明创造的基础上作出新的发明创造的，他们的周围有激发他们灵感的人存在。当一群具有创造力的人聚集在一起时，他们会相互启发，取长补短，相得益彰，从而获得成功。研究表明，具有合作精神的、人际关系良好的创造者比那些孤立者有更长的创造生涯和更多的成功机会。

从以上的论述我们可以看到，影响创造力的因素是极其复杂的。过去，心理学家主要从智能角度对创造力进行研究，现在，他们则倾向于将创造力看成是认知、人格、社会环境等各种成分的综合体，试图在一个由各种成分整合而成的框架中去理解创造力，以期对创造力问题有一个更全面深刻的认识。

三　对数学教育的启示

我们的目的是希望从心理学家关于创造力研究的新成果中获得对数学教育的启示。由于问题解决是目前我国数学教育界的一个热门话题，有人认为问题解决“作为数学教学的新趋势，已为国内外教育同行所认同”，并且问题解决将成为一种主导的“数学教学模式”，而从教学目的来看，“问题解决”教学主要是发展学生的创造力。因此，下面我们将结合数学教学中对创造力的培养问题，谈谈我们对“问题解决”的一些认识。

（一）加强对数学知识的发生发展过程的教学，既要注意学生的认知过程的特点，又要注意数学知识的逻辑性、连续性、系统性

根据创造力来自于基本的认知过程的观点，数学教学必须强调数学认知活动的全面性，使学生的认识真正有机会经历“基本认知过程”，这样才能使创造力的培养真正落在实处。一个比较可行的做法是为学生提供尽可能丰富的知识背景（其中应该包括与知识有关的课堂以外的生产、生活实际），让学生通过对知识背景的分析、归纳、抽象和概括而获取相应的理论知识。这样做至少有两个好处：一是丰富的知识背景使学生在面临问题时，能对问题及解决问题所需的知识都作出适宜的解释，从而获得知识与问题之间的丰富联结，并选择出创造性的联结方式，获得新颖独特的问题解决方法；二是使所学的知识条件化，使学生懂得在什么样的场合下可以运用相应的知识。教师经常会遇到这样的情况：学生在学习某一概念、定理的当时，能用它来解决相应的问题，但过后，一旦情景发生变化，学生就不知道该如何用它。特别是在解决综合问题、实际问题时，虽然学生具备解决问题的所有知识，但学生却不知道该怎样运用这些知识。究其原因，主要是在单一情景中获得的知识之间的联结也只能是简单而贫乏的，一旦背景

发生变化，知识的表征就会发生困难，联结也就难以形成。而使学生在丰富的知识背景中，通过自己主动的思维活动来获取知识，可以使学生在记忆该知识时，将运用该知识的“触发”条件结合起来，从而形成条件化的知识。这样，当学生面临问题时便能迅速、准确地从大脑中检索、提取与任务相关的知识，形成知识与问题之间的丰富联结，并最终选择出解决问题的最佳方案。

值得指出的是，“知识的发生发展过程”是对知识原发现过程进行教学法加工后获得的，与“问题解决教学”倡导者所强调的“非常规性”问题解决过程是有区别的。我们认为，系统的知识学习必然表现出与客观实在之间的相对脱离，不可能是对客观现实的真实复制，而学校教育的经济性也要求学生在学习知识时走一条“再创造”的捷径，但“非常规性”问题解决过程则比较强调问题的客观性，要求将实际中的许多不确定性、各种环境条件等都考虑进去，这样，由于问题复杂，影响因素过多，学生的认知水平不高，使学生难以辨明问题的结构，造成思维混乱，问题不能得到解决，系统的知识学习也难以保证。所以，我们认为，为了弥补数学教材比较注重公式、定理的逻辑推理论证，而对活生生的问题发现过程介绍得较少的不足（事实上，要求教科书详细介绍数学问题的发现过程是不可能的），教师可以对数学定理、公式等的原发现过程进行教学法加工，设计出一个既有对定理、公式的直觉、想象、猜测，又有对它们的严密逻辑证明的教学情景（程序），寓创造力的培养于知识教学之中，使知识学习与创造力培养有机地结合起来。

（二）充分认识数学基础知识教学的重要性，使学生通过主动学习而建立起结构功能良好的数学认知结构

前已述及，任何问题的解决，任何发明创造的实现，都需要相应领域内的大量专门知识。我们认为，要使学生获得的知识能真正地用来解决问题，关键是要引导学生主动地学习，使他们通

过学习，既掌握知识，又懂得在什么情况下使用知识；既掌握知识的具体事实和细节，又掌握知识的纵横联系、层次结构，把注意力放到知识的概括化和结构化上，形成一种从复杂的联系中思考问题的良好习惯；对于重要的知识、具有普遍意义的一般原理（像代数中的函数概念及其性质、立体几何中的“三垂线定理”等）应反复练习，从而使重要知识、原理与它们的产生条件及相关方面建立起紧密的联系，并达到自动化的程度，从而将重要的知识、原理表征为一个知识组块，以使学生在面临问题时，能把问题的各个方面与重要知识、一般原理联系起来，促成对当前问题的顿悟和解决。

当代认知心理学强调知识在学生身心发展中的重要性，强调认知因素（认知加工过程、认知结构）在学习与发展中的直接作用，认为知识在学生信息加工（信息输入的选择、编码、储存和提取等）能力的提高中起到至关重要的作用，认知结构的发展既是学生身心发展的重要标志之一，也是学生身心发展的主要动力之一。特定的知识、技能的缺陷是导致学习能力低下的主要原因。所有这些观点，对我们在数学教学中处理好知识学习与能力（特别是创造力）培养之间的关系都具有重要的指导意义。

问题解决教学的倡导者提出，数学课堂教学要以“问题”为中心，认为数学知识的学习可以在问题解决的过程中进行。我们暂且不论包含系统知识的“问题”是否存在，单从知识学习与创造力培养之间的关系来看，这样的做法也是不合适的，事实上是颠倒了两者的关系。我们认为，从意识到问题的存在，到发现问题之所在、寻找解题策略、确定解题策略、对解题过程进行反思，整个问题解决过程中处处都体现着知识的作用，而创造性地解决问题所需要的对相关知识的重新表征、知识与知识之间的新颖独特的联结也是要在具备相关知识的基础上才能获得的，因此，企图通过脱离数学基础知识的系统教学而培养学生的问题解决能力

的做法就好像造房子而不管打地基一样。心理学的研究也表明，只有将一般认识能力训练与学科知识学习相结合，才能更有助于解决问题能力的培养。否则，数学知识的学习会变得零零碎碎，学生无法学到系统的数学基础知识，而解决问题能力的培养也会失去必要的数学基础知识的保障。

值得一提的是，到目前为止，“问题解决”的始作俑者——美国并未获得什么普遍成功的经验，他们在反思的基础上提出了应使学生在学习过程中，保持概念理解、技能训练与问题解决三者的平衡。英国 1997 年 2 月发布教育监察报告，认为过去 25 年基础教育“过分强调独立性，反对传统的课堂教育，……，放松基础算术教学”等对英国基础教育损害巨大。国际上的这些动向是值得我国的数学教育工作者注意的。

（三）重视策略化知识的教学，数学教学中尤其要注重数学思想、数学方法的教学

数学思想、数学方法既要理解为数学中的深层次基础知识，又要理解为解决问题时的思维策略。

心理学家指出，人们在学习和思考时，注意力要在高层次的策略性知识与低层次的描述性知识及程序知识之间不断转换，不仅要意识到自己的加工材料，而且要意识到自己的加工过程和加工方法，不断反省自己的策略是否恰当，优化自己的加工过程。因此，要使元认知在创造性的问题解决过程中发挥作用，就必须在头脑中储存有关如何学习和如何思考的策略性知识。在数学学科里，这种策略性知识与事实性知识的结合是非常紧密的，是相互渗透、相互融合的，只要教师在数学课堂教学中有意识地渗透、传授，学生就可以通过课堂教学获得大量的关于解决数学问题的一般的和特殊的策略性知识。例如，数学中的配方法、换元法、待定系数法、判别式法、反证法、数学归纳法等基本方法，既是解决问题的基本手段，又是数学思想的直接体现；观察、分析、猜

想、综合、归纳、类比、抽象、概括等数学思维方法是思考数学问题的一般方法；数形结合的思想、函数与方程的思想、分类讨论的思想、化归与转化的思想等是高层次的数学思想方法，具有观念性的作用。所有这些策略性知识的传授都可以与数学具体知识的学习与运用结合起来，成为数学教学整体中的一个有机的组成部分。新修订的高中数学教学大纲中把数学思想和方法列入基础知识的范畴，使数学思想和方法的地位和作用得到了更充分的体现，这有利于促使广大数学教师更加重视对数学思想和方法的教学，从而更有利于培 养学生的能力。

（四）重视非认知因素的作用

前面我们对动机、态度及认知方式等与创造力之间的关系作了一些论述，从中我们可以看到，发展学生的内在动机，培养学生良好的态度，塑造学生健全的人格，对于发展学生的创造力是至关重要的。就激发学习动机而言，认知心理学关于有意义学习的理论值得我们重视。认知心理学认为，要使学生的学习成为有意义学习，首先学习材料本身必须是有意义的，这种意义包括心理意义和社会意义两个方面，即要使学生感到所学习的数学知识无论对自身发展还是对社会发展都是有用的；第二，学生的认知结构中具有适当的、可以与新知识进行相互联系和作用的知识，从另一个角度说，就是新知识对学生来说是难度适当的，新知识对学生既有智力的挑战性，又使学生经过努力可以赢得挑战，用维果斯基的话来说，就是新知识是学生的“最近发展区”。知识处于“最近发展区”时，最能激发学生的学习动机。认知心理学还提出了通过引发认知冲突或惊奇感来激发内在动机的做法。例如，有的老师在指数的教学时，先拿出一张纸，对学生说：这张只有 0.1 毫米厚的纸，如果对折 30 次，就可以使它的高度超过珠穆朗玛峰！不信大家可以算算看。这一问题使学生十分惊奇，从而激发了他们的学习动机；又如，在公式 $\sqrt{a^2}=|a|$，的教学中，在学生已知

$(\sqrt{a})^2=a$ $(a\geqslant 0)$ 的前提下，问学生 $\sqrt{a^2}=?$，学生回答 $\sqrt{a^2}=a$ 后又问学生，那么 $\sqrt{(-a)^2}=?$，学生回答 $\sqrt{(-a)^2}=-a$ 后，教师总结：由 $a^2=(-a)^2$ 应有 $\sqrt{a^2}=\sqrt{(-a)^2}$，于是 $a=-a$，即任何实数都等于它的相反数！从而引起学生的认知冲突，这一冲突也能激起学生强烈的学习动机。

学习应当成为学生自己的积极主动的活动，而这需要有学生对学习任务的持续兴趣作为保障，否则，外部奖赏再诱人也不能维持长时间的艰苦学习。心理学家认为，只有设法使学生“卷入”任务之中，才能达到激励内在动机的目的。促使学生“卷入”学习任务的最佳方法是使学生经常具有“成功体验”。要做到这一点，除上面所说的学习任务难度适当，学生能“跳一跳摘果子”外，教师还应向学生传授思维的方法和技巧。另外，“教师应较少详细叙述事实，较多提出问题，较少给予现成答案；要指出所教课程的戏剧性、美妙之处，引发美感；必须引发智力活动过程，必须产生对知识本身的感受。”（米勒，1979）

由以上论述我们可以看到，认知因素与非认知因素事实上是学生认知活动过程中相辅相成、互为条件的两个方面。当然，由于学生认知水平发展的限制，特别是非认知因素的不稳定性，教师的启发诱导就显得极其重要。教师应在组织课堂教学时精心安排教学过程，设法使学生从自己的切身体验出发去学习新知识，使学生的学习变得富有情趣。

（五）树立良好的“班风”，为学生营造和谐的学习气氛，使学生在一个既互相帮助，又友好竞争的环境下学习

首先，教师应发挥学习优秀者的榜样作用，教育其他学生向学习优秀者看齐，虚心向他们请教。同时，教师也要使学习优秀者认识到，同学之间互相帮助对自己的学习也有促进作用。因为自己领会某一知识并能运用，与用自己的语言恰当地叙述知识，与使自己的叙述被别人听懂、接受，并不是同一回事。从领会知识

到用自己的语言表述知识，再到让别人听懂自己的叙述，每一步都需要经过一个重新学习、重新概括的过程。没有对知识的本质属性的深刻理解，没有对知识的发生发展过程的透彻了解，就不可能将知识用浅显易懂的语言表述出来，只有掌握了知识的内在联系形式，才能将知识的来龙去脉叙述清楚。另外，教师一定要发扬课堂民主，创造一种积极热情的、相互支持、相互理解的师生关系，建设民主的、活跃的、热烈的课堂气氛，按照课程发展的具体情况灵活地调整教学情景，指导学生进行有效的学习。教师应努力学会客观公正地评价每一个学生，使他们都树立起对自己行为能力的自信心，特别应注意以积极的态度对待“差生”或学习有困难者，对他们应多鼓励、多帮助。心理学实验已经证明，“教师期望效应”的确存在，因此，教师应保持对学生的积极期望，以使学生对这种期望作出积极的反应。

我们认为，数学教学中培养学生的创造力，既是时代发展的要求，也是数学教学内部规律性的体现，并且也是数学学科的优势之一，因此应成为广大数学教师的自觉行动。

第二章　数学概念的学与教

概念是思维的基本单位。由于概念的存在和应用，人们可以对复杂事物作简化、概括或分类的反映；由于概念是在揭示了经验的内在联系，获得了事物的本质特征以后形成的，所以概念增加了经验的意义。概念将事物依其共同属性而分类，依其属性的差异而区别，因此概念的形成可以帮助学生了解事物之间的从属与相对关系。概念也可以使人们在没有直接经验的条件下获得抽象观念，而这些观念既可以用于新的情景分类，也可以用作同化或发现新知识的固着点，同时，概念之间还可以组成具有潜在意义的命题，因而概念的学习是最重要的学习课题之一。

第一节　概念学习的概述

一　概念的定义

概念是哲学、逻辑学、心理学等许多学科的研究对象。各学科对概念的理解是不一样的。哲学上把概念理解为人脑对事物本质特征的反映。而心理学对概念的理解比哲学要宽泛些，一般的，心理学认为概念是同人的分类行为紧密联系在一起的。例如，行为主义者认为概念是有机体对相似刺激物或同类刺激物作出共同反映的能力。这种解释对初级的具体概念是适宜的，但它没有指出概念应该抽象出事物的本质属性。认知心理学则把概念定义为

"符号所代表的具有标准共同属性的对象、事物、情境或性质。"这里的符号主要是指具有一般意义的词。例如，看到"圆"这个词，人们的脑子里立刻引起一般的圆的表象，它不是指某一个具体的圆，而是指抽象的圆，世界上并不存在这种离开具体圆的抽象圆，这时，"圆"这个词就代表了一个概念。现代认知心理学认为，概念具有发展性，随着知识结构的不断完善，学生对概念的理解就从具体水平向抽象性水平发展，从日常概念（有时这种概念是错误的）向科学概念发展。

概念通常包括四个方面：概念的名称、定义、例子和属性。例如，"圆"这个概念，"圆"这个词是概念的名称；"到定点的距离等于定长的点的集合叫做圆"是概念的定义；符合定义特征的具体图形都是概念的例子，称为正例，否则叫反例；"圆"的属性有：是平面图形、封闭的、存在一个圆心、圆心到圆上各点的距离为半径（定长），等等。

二　概念的分类

所谓概念分类，就是依照某种标准，将事物划分为若干个类别，而这些类别之间是有内在联系性的。

人类世界是由大量可辨别的不同物体、事件和人物组成的。世界上没有完全相同的两个人，所谓"一个人不能同时跨进一条河"形容的就是世界上的事物随时间、地点、条件的变化而变化的道理，而人类之所以能应付周围环境的随时变化，就是因为有了分类能力。凭借这种能力，人们可以对周围的物体、事件和人物进行分类。当人接收到环境信息时，他可以利用类别作出推理，从而超越所给的信息，达到认知（学习）的目的。例如，当学生遇到一个数学问题时，通过阅读，他会将问题归结为几何问题或代数问题，等等；对于几何问题，他又会进一步归结为平面几何或立体几何，然后又归结为是度量问题（求角度、长度、面积、体

积等）还是关系问题（位置关系、大小关系等），再归结到三角形、四边形，……最后用具体知识进行解答。因此，学生的整个解题过程，可以看成是一系列的分类过程。所以，分类是人类认知的基本手段，分类"就是要分别对待各种相同的事物，对周围的各种物体事件和人进行归类，并根据它们这一类别的成员关系而不是它们的独特性对它们作出反应"，而类别则是人类认知的工具。学习和利用类别是一种最基本、最普遍的认知形式。人类是通过这种认知形式来适应环境的。[①]

分类活动是以掌握相应事物的关键属性为前提的，分类活动必须符合一定规则，这些规则是：（1）要以关键属性作为分类标准。如"凸平面四边形"的关键属性有：平面图形、封闭的、四条边、四个角、凸图形等。（2）指明关键属性的组织方式。如四条边不共面、不封闭，则不是凸平面四边形。（3）要确立公认的限制条件。如凸平面四边形可以有大小、形状等的差别，但是它只能有四条边，这是公认的限制条件。（4）要权衡各种不同的属性（即哪些是关键属性，哪些是无关属性）。例如，凸平面四边形的四条边可以有长短、四个角可以有大小，这些都不是关键属性。

在概念学习过程中，分类活动占有非常重要的地位。分类是概念获得的基础，是对概念的内涵进行认识的过程；分类活动有助于学生更深刻地理解概念之间的关系；分类活动有助于学生从整体上把握概念；分类是概括的基础，因此分类活动有助于提高学生的概括能力；通过分类，可将事物依其属性而归类，依其相互之间的联系而成系统，而类别清晰、逻辑关系明确的概念系统有利于记忆和检索。所以，教师必须十分重视概念分类这一环节。

人们在对事物或问题进行分类时，一般是根据问题的各种属性及其关系作出判断的。那么，人们是如何组合各种属性从而作

---

① 施良方．学习论．北京：人民教育出版社，1994，5．204

出分类的呢？心理学家认为，组合不同属性的方式有三种，它们分别代表了三种类型的概念：一是"联合属性"，即几种属性联合在一起对概念来下定义。这样所定义的概念称为"合取概念"。例如，"映射"就是一个合取概念：设 A，B 是两个集合，f：$A\to B$ 是一个对应法则，如果对于集合 A 中任意一个元素 a，通过法则 f，在集合 B 中都有唯一的一个元素 b 与之对应，则 f：$A\to B$ 称为从集合 A 到集合 B 的映射。这里，对于集合 A 中任意一个元素 a，通过法则 f，在集合 B 中不但有元素与之对应，而且是唯一的，"有"和"唯一"就是两个属性。二是"单一属性"，即在许多事物的各种属性中，找出一种（或几种）共同属性来对概念下定义。这样所定义的概念称为"析取概念"。例如，在定义"椭圆"、"双曲线"、"抛物线"的基础上再定义"圆锥曲线"："从顶点向两侧伸长的两叶圆锥面和任一平面相交而成的曲线"，这里的"圆锥曲线"就是析取了"椭圆"、"双曲线"、"抛物线"等的共同属性而获得的。三是"关系属性"，即以事物的相对关系作为对概念下定义的依据。这样所定义的概念称为"关系概念"。例如，"正方形"就是一个关系概念，它既要是凸四边形，又要求四条边相等，还要求四个角是直角。显然，在数学中，上述三种概念都是大量存在的。

三　数学概念的特点

由于数学的研究对象是事物的数量关系和空间形式，而这种关系和形式是脱离了事物的具体物质属性的，因此，数学概念有与此相对应的特点。

1．数学概念是反映一类事物在数量关系和空间形式方面本质属性的思维形式，它是排除一类对象的具体物质内容以后的抽象，反映的是一类对象在数与形方面的内在的、固有的属性，因而它在这一类对象的范围内具有普遍意义。

2. 数学概念是人类对现实世界的空间形式和数量关系的简明、概括的反映，并且都由反映概念本质特征的符号来表示，这些符号使数学的表述形式比别的学科更加简明、清晰、准确。数学概念的这种特性使学生在较短时间内掌握大量数学概念及其系统成为可能。例如，在数学发展史上，数系的建立经历了两千多年，如今，学生凭借现有的数的符号，可以在较短的时间内掌握数系的全部概念。而在中国数学的发展史上，由于没有发明简明的数学符号而使数学的发展受到极大阻碍的例子是非常多的（如以一、二、三、四、五、……作为数的符号，在书写和运算上均不如用 1，2，3，4，5，…方便），这说明在数学的发展中引进恰当的符号来表示概念是非常重要的，这是数学概念的一个重要特点。

3. 数学概念是具体性与抽象性的辩证统一。一些数学基本概念是一类事物在数量关系和空间形式方面的关键属性的抽象，具有明显的直观意义，但往往用形式化语言来表述；数学中有许多概念是在抽象之上的抽象，是由概念所引出的概念（如 1，2，3 是对真实事物的直接抽象，而那些较大的数则是建立在已有概念的抽象分析之上：对于“已知 x，则可得 $x+1$”的理解使人们可以获得自然数的无限序列：1，2，3，…，n，$n+1$，…）；数学中还有许多概念是“思维的自由想象和创造的产物”，它们与真实世界的距离是非常遥远的，如“虚数”、“n 维空间”等。所有这些都说明，数学是高度抽象的。但另一方面，数学概念又是非常具体的，一个数学概念的背后有许多具体内容为支撑，学生只有掌握了数学概念的定义，同时又能够举出概念的具体事例，才算真正掌握了数学概念，从这个角度来说，数学概念又是非常具体的。

4. 数学概念具有很强的系统性。前已指出，数学概念往往是“抽象之上的抽象”，先前的概念往往是后续概念的基础，从而形成了数学概念的系统。公理化体系就是这种系统性的最高反映。数

学概念的这种特性要求学生在数学学习时必须做到循序渐进，一步一个脚印，扎扎实实地打好基础。

值得指出的是，数学概念的特点不能与个体所掌握的数学概念的特点相混淆。个体所掌握的数学概念是与他本人的数学认知结构水平相适应的，即同一个数学概念，由于认知结构水平的不同，存在着不同水平的理解。例如"函数"这个概念，初中学生只能作"对于给定区间上的每一个 x 值都有唯一的一个 y 值与之对应，则 y 就是 x 的函数"之类的直观理解，而高中学生就可以用集合论的语言，从映射的观点出发来理解。这种抽象水平的层次性反映了学生数学认知结构水平对概念掌握的制约性，这是教师把握概念教学要求的依据之一。

第二节　数学概念的获得

一　概念获得的不同形式

学生理解和掌握概念的过程实际上是掌握同类事物的共同、关键属性的过程。例如，学习"棱锥"这个概念，就是掌握：凸多面体、底面是多边形、侧面是有一个公共顶点的三角形等几个关键属性。同类事物的关键属性可以由学生从大量同类事物的不同例证中独立发现，这种概念获得的方式叫做概念形成；也可以用定义的方式向学生直接揭示，学生利用已有认知结构中的有关知识来理解新概念，这种获得概念的方式叫做概念同化。概念形成与概念同化是两种基本的概念获得方式。

由于数学学习是掌握前人已经发现的数学知识，把前人的数学活动经验转变成自己的经验，使其成为自己解决问题的工具的过程，因此概念同化是学生获得数学概念的最基本方式。但是，由于学生的认知结构处于发展过程之中，他们的数学认知结构比较

简单、数学知识比较贫乏而具体，在学习新的数学知识时，作为“固着点”的已有知识往往很少或者不具备，这时他们就只能采取概念形成方式来学习。另一方面，随着年龄的增长，知识经验的不断丰富，学生所掌握的概念系统也从具体到抽象、从简单到复杂、从未分化到分化、从分散到统一地连续不断地获得发展，相应的，学生获得概念的方式也在发生变化。年龄越小，认知结构越简单而具体，概念形成的方式就用得越多。

二　概念形成

概念形成过程实质上是抽象出某一类对象或事物的共同本质特征的过程。概念形成过程可概括如下：

1. 辨别各种刺激模式。这些刺激模式可以是学生自己在日常生活中的经验或事实，也可以是由教师提供的有代表性的典型事例。但不管是哪种刺激模式，都必须通过比较，在知觉水平上进行分析、辨认，根据事物的外部特征进行概括。例如，形成矩形概念，先让学生辨认他们所熟悉的实例，像桌面、墙壁、黑板、书本表面等。

2. 分化出各种刺激模式的属性。为了理解该类刺激模式的本质属性，就需要对各种刺激模式的各个属性予以分化。例如，桌面是木制的，可看成是四边形，两组对边分别平行并且相等，四个角相等，等。墙壁、黑板、书本表面等也有各自的属性。

3. 抽象出各个刺激模式的共同属性，并提出它们的共同关键属性的种种假设。上例中，共同属性有：可抽象地看成平面四边形；四个角相等；两组对边分别平行并且相等；等等。共同关键属性可假设为：(1) 两组对边分别平行并且四个角都是直角的四边形是矩形；(2) 两组对边分别相等并且四个角都是直角的四边形是矩形；(3) 四个角都是直角的平面四边形是矩形；等等。这里，提出关键属性假设的方法是一条或几条共同属性的结合。

4. 在特定的情境中检验假设，确认关键属性。检验过程中，采用变式是一种有效手段。如上例中，通过变式可以发现，三个假设在各种变式中均出现，因而都可确认为关键属性。

5. 概括，形成概念。验证了假设以后，把关键属性抽象出来，并区分出有从属关系的关键属性，使新概念与已有认知结构中的相关观念分化，用语言概括成为概念的定义。上例中，（1）和（2）中的“四个角都是直角”与“有一个角是直角”具有从属关系，而四边形只要有“两组对边分别平行”及“一个角为直角”，那么就能推出“两组对边分别相等”和“四个角都是直角”，因此只要取前两个关键属性即可。于是将矩形定义为“两组对边分别平行并且有一个角为直角的四边形”。

6. 把新概念的共同关键属性推广到同类事物中去。这既是在更大范围内检验和修正概念定义的过程，又是一个概念应用的过程，从中可以看出概念的本质特征是否已被学生真正理解。因此在这个过程中，教师可以用一些概念的等值语言来让学生进行判断和推理。上例中，“对角线相等并且平分”就是矩形概念的等值语言。事实上，这个过程是使新概念与已有认知结构中比较稳定的相关观念建立起牢固的实质性联系的过程，因此这是概念形成的一个非常重要的步骤。

7. 用习惯的形式符号表示新概念。通过概念形成的上述步骤，学生比较全面地了解概念的内涵，而且还掌握概念的许多具体例证，对于概念的各种变式也有较好的理解，总之，学生对概念的内涵和外延都有了比较准确、全面的理解。这时，就应该及时地引进数学符号。引进数学符号以后，应当引导学生把符号与它所代表的实质内容联系起来，使学生在看到符号时就能够联想起符号所代表的概念及其本质特征。事实上，如果概念的符号能够与概念的实质内容建立起内在联系，那么，符号的掌握可以提高学生的抽象概括能力。数学中的逻辑推理关键就在于能够合理、

恰当地应用符号，而这又要依靠对符号的实质意义的把握。在概念学习中，形式地掌握符号而不懂得符号本质涵义的情况是经常发生的，这时符号将使知识学习产生困难，导致数学推理的错误。例如在函数的学习中，由于对函数的一般表达式 $y=f(x)$ 中 x,y,f 的意义不理解，经常会出现类似于 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$ 的错误。

用概念形成方式教学概念时，教师必须注意按学生的心理发展规律办事。首先，给学生提供的刺激模式应该是正例，而且数量要恰当；其次，向学生呈现刺激模式时，应该采用同时呈现的方式，以利于学生进行分析、比较，这样可以减轻学生的记忆负担；第三，要注意选择那些刺激强度适当、变化性大和新颖有趣的例子作为刺激模式，这样的刺激模式有利于学生进行深入的观察，展开积极的思维活动，对各个刺激模式的属性进行充分的分化，对刺激模式之间的各种属性进行比较，有利于培养学生从平常的现象中发现不平常的性质、从貌似无关的事物中发现相似点或因果关系的能力；第四，要让学生进行充分的自主活动，使他们有机会经历概念产生的过程，了解概念产生的条件，把握概念形成的规律，在分化和比较的基础上，引导学生及时对各个刺激模式中的共同属性进行抽象、并从共同特征中抽象出本质属性，及时对概念的本质特征进行抽象概括，有利于学生更加准确、迅速地掌握概念，因为这时学生还没有把智力动作与刺激模式中的无关特征联系起来的习惯，否则就有可能使无关特征得到强化，使学生将刺激模式中的无关特征当成本质特征，从而产生对概念的错误理解；第五，在确认了事物的关键属性，概括成概念以后，教师应该采取适当的措施，使学生认知结构中的新旧概念分化，以免造成新旧概念的混淆，新概念被旧概念所湮没，例如，学习三角函数中的“第一象限的角”这个概念以后，如果不及时与已有的“锐角”概念分化，则学生很可能把它与锐角等同起来；第六，

必须使新概念纳入到已有的概念系统中去，使新概念与认知结构中已有的起固着点作用的相关观念建立起实质的和非人为的联系。这样可以使概念的记忆效果提高，有利于概念的检索，有利于用掌握的概念去吸收和理解新的知识。

在用概念形成的方式进行概念教学时，教师的语言中介作用很大，因为教师的语言引导可以使学生更加有的放矢地对概念的具体事例进行分析、归纳和概括。否则，学生就很可能会用"尝试错误"的方式去辨别、分化概念的具体事例，这样会减缓辨别的速度，使具体事例的各种属性的分化不充分，由此就会影响到概括的质量。另外，教师还应该设法用一定的教学情境来引导学生回忆和提取与概念学习相关的知识，激发新概念与已有认知结构的矛盾，引起学生的积极思维，使学生积极主动地投入学习。

应当强调，用概念形成方式进行概念教学时，教师一定要扎扎实实地引导学生完成概念形成的每一个步骤，如果没有经历概念形成的全过程，学生往往很难全面正确地理解概念，很容易造成对概念的片面、孤立甚至是错误的理解。教师应当引导学生在认清概念的内涵以后再进行概念应用，引导他们在揭示概念背后的丰富内容的基础上形成新概念，在建立新概念与已有认知结构中有关观念的实质性和非人为的联系上下功夫，而不仅仅是在字面上逐字逐句地再现概念。否则，将给学生的知识保持带来困难，而且也会使学生的思维训练受到危害，因为在没有清晰地把握概念的本质特征就去应用概念只能是一种盲目的应用，他们的思维也会是杂乱无章的。

三　概念同化

随着年龄的增加，学生的认知水平在提高，他们认知结构中的知识越来越丰富，所掌握的概念也越来越成系统，相应地，概念同化也逐渐成为他们获得概念的主要形式。概念同化属于接受

学习。由奥苏伯尔的有意义接受学习理论可知，要使学生有意义地同化新概念，必须：第一，新概念具有逻辑意义；第二，学生的认知结构中具备同化新概念的适当知识；第三，学生积极主动地使这种具有潜在意义的新概念与他认知结构中的有关观念发生相互作用，改造旧知识，使新概念与已有认知结构中的相关知识进一步分化和融会贯通。

用概念同化方式学习概念有以下几个阶段：

1. 揭示概念的关键属性，给出定义、名称和符号。如“一次函数”的定义为“函数 $y=kx+b$，其中 k，$b\in\mathbf{R}$。”

2. 对概念进行特殊的分类，讨论这个概念所包含的各种特例，突出概念的本质特征。上例中可讨论的一次函数特例是：$y=kx$，$y=x$，$y=b$，$y=0$，等等。要突出函数表达式中，自变量 x 的次数为一次这个关键特征。

3. 使新概念与已有认知结构中的有关观念建立联系，把新观念纳入到已有概念体系中，同化新概念。上例中，把一次函数与函数概念、一次多项式概念等等作比较，认识一次函数与这些相关概念的联系与区别。

4. 用肯定例证与否定例证让学生辨认，使新概念与已有认知结构中的相关概念分化。上例中可举：$y=x-1$，$y=-x+b$，$y=0$，$y=1$，$y=-x$，$y=x^2$，$ay=x+3$ $(a\neq0)$ 等，并要求学生指出相应的 k，b 各是多少。学生往往认为 $y=0$ 不是一次函数，而 $y=x-1$ 中的 $b=1$ 等。这一阶段可以纠正理解上的错误。

5. 把新概念纳入到相应的概念体系中，使有关概念融会贯通，组成一个整体。

概念同化方式获得概念，实际上是用演绎方式理解和掌握概念。因为它是从抽象定义出发来学习概念的，所以应注意及时应用实例，使抽象概念获得具体例证的支持。学习中，必须经过概念分类这一步，因为它可以使学生从外延角度进一步对概念进行

理解，使他们对概念的认识进一步深化，搞清概念的各个方面，认清概念的各种特例。还要注意，在引入概念的同时，应该要求学生掌握一定的智力动作，例如，如何判断某一事物是否隶属于该概念，如何推出隶属于该概念的事物的相应特征等。这样可以防止出现知道概念的定义而不知如何将它用于解题的情况。还要注意为学生及时提供应用概念进行推理、论证的机会，在应用中强化概念，以防止由于没有经历概念形成的原始过程而出现的概念加工不充分、理解不深刻的情况。另外，一定要将所学概念纳入到已有认知结构中，形成概念系统，因为这一步可以使学生经历一次新的概括过程，使学生了解到有关概念之间的逻辑关系，从而深化概念的理解，使概念掌握得牢固，并能用来解决新的问题。

必须注意，数学概念是在主客体相互作用的基础上，主体反映客体时所产生的主观产物，因此概念不同于物体，概念教学的过程也不同于物体的传递过程。过去，一讲到知识的传授或接受，就会将它与物体的传递或接受模式联系起来，认为传递或接受一定是既不改变事物的性质也不改变事物的存在形式，只是发生位置移动而已。因而在数学概念的教学中，一讲到概念同化，就会将它与概念的接受联系起来，进一步的又会与"注入式"教学联系起来，学生只能是被动地接受概念。事实上，这种理解是片面的，因为用概念同化模式进行数学概念教学时，教师为了把自己对概念的理解传授给学生，必须将他的主观理解赋予一定的客观形式，即必须借助于一定的物质媒体（如声波、光波、文字等）进行编码，使其作为主观理解的载体，成为所要传递信息的信号，才能进行概念的教学。而从学生的角度来说，他所接收到的并不是现成的概念本身，而是教师用以说明他的理解的媒体或信号，他要从媒体和信号中获得教师所传递的理解或信息，则必须在自己的接受系统中进行一系列的加工处理，进行各种形式、各种水平的变换。这就要完成一系列的译码、编码活动，在自己的头脑中

重新建构对概念的理解。因此，概念同化过程同样是学生对概念的主动理解过程，是学生利用自己已有认知结构对概念进行重新建构的过程。这样，只有学生处于十分主动的状态，积极进行一系列复杂的生理、心理水平的变换，即能动的反映活动才能实现对数学概念的理解。

在数学概念学习中，两种方式不能孤立使用，如果仅用概念形成方式学习，显然不符合学校学习的经济性原则；而仅仅用概念同化方式学习，由于数学概念的高度抽象性，学生比较难以把握概念背后的丰富内容，难以理解概念的关键属性，容易造成学习的表面化。因此应把两者结合起来使用。教师可以在揭示概念的定义之后，引导学生在定义的指导下观察实际事例，定义的导向可以使学生比较容易地揭示实例中包含的与概念有关的关键属性。同时，通过正例与反例的应用，通过学生自己对实例的比较、分析、概括、分化和类化等，可以使概念的关键属性变得清晰，使实例成为理解概念的思维载体，然后再引导学生将新概念与已有认知结构中的相关观念建立联系，形成概念系统。

概念形成与概念同化都是在现有认知结构的基础上学习新概念，因此，在概念教学中，教师把握学生现有认知结构的状况非常重要。事实上，学生感知和理解事物的一般方式是由学生的已有认知结构来决定的，新的概念不是被同化到现有认知结构中，就是改造这个现有认知结构以接纳新概念。因此，新概念的学习一定要适合学生现有认知结构的水平，概念教学得以充分展开的根本原动力是学生已有的认知结构与新概念之间的不平衡。根据皮亚杰的认知发展理论，学生在遇到新概念时，总是先用已有认知结构去同化，如果获得成功，就得到暂时的平衡；如果同化不成功，则会调节已有认知结构或建立新的认知结构，以顺应新概念，从而达到新的平衡。教师应依据学生概念学习的这种机制，利用新概念与学生已有认知结构之间的差异来设置相应的教学情境，

以使学生能够意识到这种不平衡，从而引起学生的认知需要，促使学生展开积极主动的学习活动。

第三节　影响概念学习的因素

一　学生的经验

学生获得概念的能力随年龄的增长、经验的增加而发展，智力也是影响概念学习的重要因素之一。但研究表明，就智力与经验对概念学习的影响程度来看，经验的作用更大，丰富的经验背景是理解概念本质的前提，否则将容易导致死记硬背概念的字面定义而不能领会概念的内涵。这里的“经验”除了来自学校学习以外，还可以来自日常生活而且日常生活经验在学习中发挥着非常重要的作用。事实上，学生掌握的科学概念许多都是从日常概念中发展而来的。因此，教师应注意指导学生从自己的日常生活中积累有利于概念学习的经验，同时又要注意利用学生的日常经验，为概念教学服务。

就数学概念学习而言，“经验”对新概念学习的影响更多地表现在概念系统的扩张上，有的学生能够从过去的经验中找出与新概念相关的概念，在比较它们异同的基础上建立起新的概念，而有的学生则会受这种经验的干扰，产生错误的概念理解。例如，学生对于平方运算是从小学就开始接触的，在他们的经验中，平方运算只与“正”联系在一起；另外，关于方程，他们所熟悉的也是一次的，即一个方程对应一个解。在学习“平方根”与“算术平方根”这两个概念时，由于一个正数的平方根涉及到正负两个数，而事实上这两个数就是方程$x^2=a$的两个根，这与他们的经验是非常不同的，于是就出现了“平方根”概念学习的极大困难；与此同时，又要学习“算术平方根”概念，这样就出现了有时要取

正负两个值，有时又只能取一个正数的情况，从而引起学生理解上的混乱。

为了防止经验对新概念学习产生的消极影响，首先仍然应该在基本概念的教学上狠下功夫，要把基本概念放在中心地位，使它成为联系相关知识的纽带，突出概念之间的内部联系性。数学中有些概念具有统贯全局的作用，例如“集合”、“函数”、“方程”、“距离”等，这些概念就应该让学生有反复接触的机会，并以它们为基础，演绎出其他概念，用奥苏伯尔的话来说，就是：从学习最一般的概念然后逐渐分化出较具体的概念，往往是最有效的。例如高中代数中，教材编排由“对应”到“映射”再到“函数”再到“幂函数”、“指数函数”、“对数函数”等具体函数，就是按照“逐渐分化”原则安排的。当然，并不是所有的内容都可以这样安排的，例如“数系”就不可能按照“复数→实数→有理数、无理数→整数、分数→自然数”的顺序安排，对于这样的内容，教学时就要注意给出恰当数量的实例，使学生有一个从各个具体例子中抽象出共同特征并再概括出本质特征的机会（实际上就是应该注意应用“概念形成”的教学策略），由浅入深、由易到难、由已知到未知地进行学习。同时还要注意及时引导学生探讨新旧概念之间的关系，找出它们的相同点和不同点。例如，学习“二次根式”时，既要注意由$(\sqrt{a})^2=a(a>0)$，$\sqrt{a^2}=a(a>0)$引出$\sqrt{a^2}=|a|(a\in \mathbf{R})$，又要注意将$\sqrt{a^2}=|a|(a\in \mathbf{R})$与$(\sqrt{a})^2=a(a>0)$，$\sqrt{a^2}=a(a>0)$作比较，找出它们的差异，并让学生有充分的实践机会，以建立起这种联系与差异的感觉。这里我们强调了让学生利用概念进行反复练习的重要性，我们认为，这种练习不能与机械重复等同，因为数学概念与学生的现实之间的距离比较遥远，如果他们没有机会对概念进行反复练习，那么达到理解所需要的那种感觉就难以建立。例如，“有理数”、“无理数”概念，学生就是在对 2，3，5 等数进行开平方的计算过程中，看到不是

循环小数，而有些数又是有限小数或循环小数，在这样的运算、比较的过程中来理解和掌握它们的。当然，这种反复训练应该与学生的认知水平相互适应，应该及时地向学生提出理解上的高标准。随着学生年龄的发展，数学学习的深入，他们可以逐渐做到在抽象概念的指导下进行实际训练，使概念应用与理解概念之间相互促进，以加快理解速度、提高训练效率。

二　感性材料或感性经验

概念形成主要依靠对感性材料的抽象概括，而概念同化则主要依靠对感性经验的抽象概括。因此，感性材料或感性经验是影响概念学习的重要因素。具体地，可以从下列四个方面来看：

1. 数量。感性材料和感性经验的数量太少，学生对概念的感知不充分，对掌握概念所必须的经验不能建立起来，就难以对概念对象的各种要素进行全面鉴别，这样就会由于对概念的关键属性和无关属性的比较不充分而无法建立理解概念所需要的坚实基础。当然，这种数量也不能太多，否则，无关特征将有可能被不恰当地强化而掩盖了关键特征。

2. 变式。变式是变更对象的非本质特征的表现形式，变更观察事物的角度或方法，以突出对象的本质特征，突出那些隐蔽的本质要素，一句话，变式是指事物的肯定例证在无关特征方面的变化，让学生在变式中思维，可以使学生更好地掌握事物的本质和规律。

变式是概念由具体向抽象过渡的过程中，为排除一些由具体对象本身的非本质特征带来的干扰而提出来的。一旦变更具体对象，那么与具体对象紧密相联的那些非本质特征就消失了，而本质特征就显露出来。数学概念就是通过对变式进行比较，舍弃非本质特征并抽象出本质特征而建立起来的。例如，在学习三角形的高这一概念时，可以为学生提供如图 2.3.1 的变式，也即向学

生提供一些在形状（锐角、直角、钝角三角形）、位置等方面有变化的不同三角形的例证，让学生通过对这几种典型变式的思维加工，抽象概括出"三角形的高"的定义。

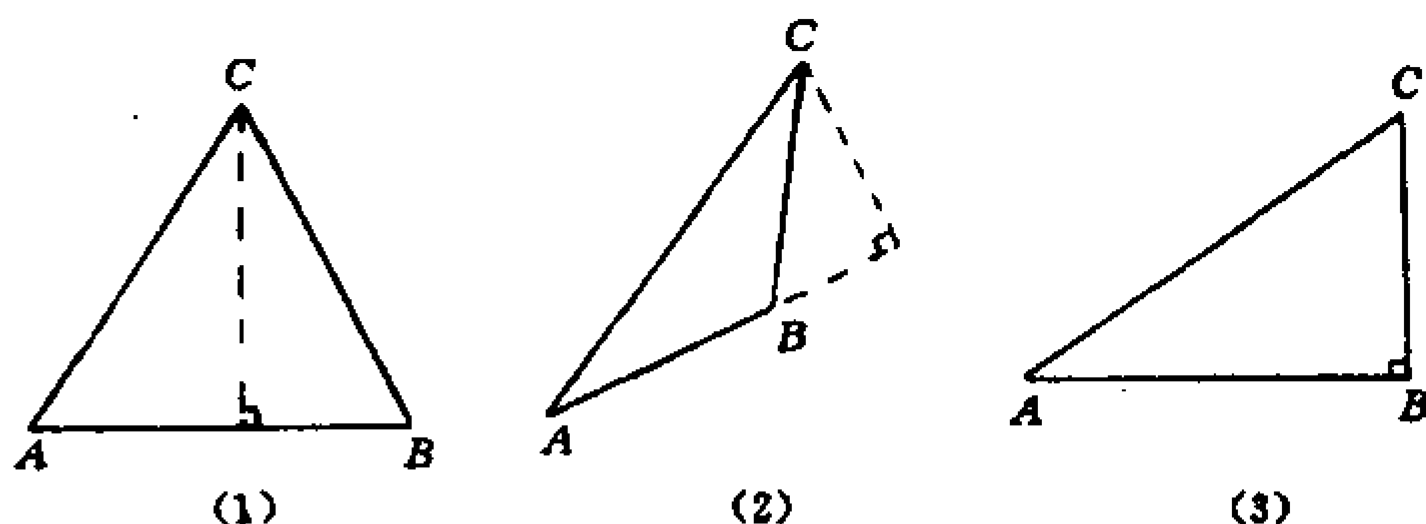


图 2.3.1

值得注意的是，变式不仅可以在概念形成过程中使用，也可以在概念的应用中使用。因此，我们既可以变更概念的非本质特征，也可以变换问题的条件和结论；既可以转换问题的形式或内容，也可以配置实际应用的各种环境。总之，就是要在变化中求不变，万变不离其宗。这里，变的是事物的物理性质、空间表现形式，不变的是事物在数或形方面的本质特征。变化的目的是使学生有机会亲自经历概念的概括过程，使学生所掌握的概念更加精确、稳定和易于迁移，避免把非本质特征当成本质特征。

变式的运用要注意为教学目的服务。数学知识之间的联系性是变式的依据，即利用知识的相互联系，可以有系统地获得概念的各种变式。另外，变式的运用要掌握好时机，只有在学生对概念有了初步理解，在对这种理解的进一步深化过程中运用变式，才能收到好的效果，否则，如果在学生没有对概念建立初步理解时就运用变式，将会使学生不能理解变式的目的，变式的复杂性会干扰学生概念理解的思路，使学生产生理解上的混乱。

3. 典型性。实践表明，概念的本质特征越明显，学习越容易，非本质特征越多、越明显，学习越困难。因此，在对概念进行举例时，为了突出概念的本质特征，减少学习困难，教师可以采用扩大有关特征的办法，并且对一个概念的本质特征可以作适当的归类练习。例如，对"单项式"概念，主要涉及单项式的定义、系数、次数等几个方面。对定义，应该突出"数字与字母的积"，所举例子既有形如 $4x^2$，$-\frac{1}{3}ab$，m 的，又要让学生分析单独一个数是否为单项式；对"系数"，既要有正系数，又要有负系数，特别应该让学生指出 x，$-x$ 以及 2，-5 这样的"数字单项式"等特殊单项式的系数是多少；对单项式的"次数"，既要有 x^2，$\frac{1}{3}x^3$，又要有$\frac{1}{2}ab$，$-7xy^3$ 等，并要让学生辨别"数字单项式"的次数是多少。这些具有典型性的概念例证，可以帮助学生在概念学习中抓住本质特征，理解概念的各个方面。

4. 反例。概念的反例提供了最有利于辨别的信息，对概念认识的深化具有非常重要的作用。反例的适当使用不但可以使学生对概念的理解更加精确，而且还可以排除无关特征的干扰。如学生往往把"复数的模"与"实数的绝对值"这两个概念混淆起来，出现诸如"$|z_1|=|z_2|$，则 $z_1=\pm z_2$"之类的错误。通过反例"$z_1=i$，$z_2=1$，有 $|z_1|=|z_2|$，但 $z_1\neq\pm z_2$"，立即能够纠正这种错误。又如，学生在学习函数概念时，往往只注意函数的表达式而忽视函数的定义域，这表明学生在理解概念时割裂了概念本质特征的诸方面，这时可举反例"$y=x$ 与 $y=\frac{x^2}{x}$是同一个函数吗？"另外，学生在概念学习中，往往在概念定义的措词上发生错误，如"三点确定一个平面"、"两条没有公共点的直线叫做平行线"等，我们认为，出现这些问题的原因不能仅仅归咎于学生粗心，深层原因是学生没有把注意指向概念本质特征诸方面的关系，没有把这

种关系当成关键特征来认识，举反例可以促使学生增强对这种关系的重要性的认识。

应该注意的是，“反例”的运用是有时机的，一般来说，我们不能在学生刚刚接触概念时就运用反例，否则将有可能使错误概念先入为主，对概念的理解产生干扰。反例是在学生对概念有了一定理解的基础上才能使用的。

综上所述，教师为学生提供的经验材料太少或者太多都会对概念学习产生不利影响，这是教学中举正例时所应注意的。另一方面，仅从正面还不足以使学生真正理解概念，还必须引导学生从侧面和反面来理解概念，所谓“从侧面理解概念”，就是利用“变式”来理解概念，用等值语言来叙述和理解概念；而所谓“从反面理解概念”，主要则是“举反例”，就是把概念所包含的某一个或几个关键属性抽去，看看会出现什么情况。

三　学生的概括能力

概括是形成和掌握概念的直接前提。学生学习和应用知识的过程就是一个概括过程，迁移的实质就是概括。概括又是一切思维品质的基础，因为如果没有概括，学生就不可能掌握概念，从而由概念所引申的定义、定理、法则、公式等就无法被学生掌握；没有概括，就无法进行逻辑推理，思维的深刻性和批评性也就无从谈起；没有概括，就不可能产生灵活的迁移，思维的灵活性与创造性也就无从谈起；没有概括，就不能实现思维的“缩减”或“浓缩”，思维的敏捷性也就无从体现。学生掌握概念，直接受他们的概括水平的制约，要实现概括，学生必须能对相应的一类具体事例的各种属性进行分化，再经过分析、综合、比较而抽象出共同的、本质的属性或特征，然后再概括起来；在此基础上，再进行类化，即把概括而得到的本质属性推广到同类事物中去，这既是一个概念运用的过程，又是一个在更高层次上的抽象概括过

程；然后，还要把新获得的概念纳入到概念系统中去，即要建立起新概念与已有的相关概念之间的联系，这是概括的高级阶段。从上所述可知，对概念的具体例证进行分化是概括的前提，而把概念类化，使新概念纳入到概念系统中去，又成为概念学习深化的重要步骤，因此，教师应该把教会学生对具体例证进行分化和类化当成概念教学的重要环节，使学生掌握分化和类化的技能技巧，从而逐渐学会自己分析材料、比较属性，并概括出关键属性，以逐步培养起概括能力。另外，数学概括能力中，很重要的是发现关系的能力，即发现概念的具体事例中各种属性之间的关系，发现新概念与已有认知结构中相关概念之间关系的能力，如果发现不了这种关系，概括也就难以进行。例如，在学习复数的模这一概念时，获得的是：复数 $z=a+bi$ 的模是与复平面内的点 Z (a, b) 相对应的有向线段$\overline{OZ}$的长度，即点 Z (a, b) 到原点 O 的距离，也叫复数 $a+bi$ 的绝对值。为了让学生经历复数模的概括全过程，教师就应该引导他们将它纳入到已有的数的绝对值概念系统中去。在具体做法上，可以引导学生比较复数的绝对值与以前掌握的实数的绝对值之间的异同，把后者看成是前者的发展，也可以把前者看成是后者的特例。然后，再就几何意义的解释上，将实数轴看成是复平面的一部分，实数 a 对应于复平面内的点 $(a, 0)$，从而有 $|a|=\sqrt{(a-0)^2+(0-0)^2}=\sqrt{a^2}$，实数的绝对值解释成复数的模。实践表明，在概念学习中，只有按照数学概念的层次结构，实现不断深入的抽象概括，形成结构功能良好的概念体系，才能使学生准确地掌握概念的本质，形成比较完善的数学认知结构。数学概念的抽象性具有层次性的特点，使得概念学习中概括活动具有层次性，抽象程度低的概念成为高层次概括活动的具体素材，随着概括活动层次的提高，学生掌握的概念的抽象程度也在提高，并逐渐形成概念的体系。因此，数学概念的学习与教学必须做到“彼此照应”，注意概念的发展。

四　数学语言表达能力

语言给事物以命名，对事物的属性与功能进行表述。通过命名，可以使人头脑中关于事物的表象简约化。因为事物有了自己的“名字”，当它的表现形式发生改变而把本质特征掩盖起来时，人们可以利用这个“名字”以避免认知上的混乱。对事物的属性或功能的叙述，可以帮助学习者深化概念学习，使概念各要素之间的关系更加明确，使一个概念与其他概念之间的联系与区别更加清晰。语言使个体在理解概念的过程中，无需从头观察事物或回忆有关表象就能直接形成概念。所以，语言表达是概念学习过程中非常重要的一个环节。数学中各种结论的获得都要依靠逻辑推理，而数学语言表达能力直接影响逻辑推理的进行，当然也影响到数学概念的形成。另外，学生能够用自己的语言正确地叙述概念，解释概念所揭示的本质属性，这是学生深刻理解概念的一种标志。

许多数学概念的语言表述都代表了概念产生的条件，是相应事物在数或量方面的发生发展过程的一种抽象，因此，概念的叙述过程实际上表明了概念应用时应该遵循的一种操作程序。例如，“单调函数”概念的语言表述是“设函数 $f(x)$的定义域为 I，如果对于属于定义域 I 内某个区间上的任意两个自变量的值 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，那么就说 $f(x)$在这个区间上是增函数；如果对于属于定义域 I 内某个区间上的任意两个自变量的值 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，那么就说 $f(x)$在这个区间上是减函数”，根据这个定义的叙述，我们可以总结出判断函数单调性的操作程序是：

(1) 设 x_1，x_2 是给定区间上的任意两个自变量值，且 $x_1<x_2$；

(2) 分别计算 $f(x_1)$和 $f(x_2)$；

(3) 判断差 $f(x_1)-f(x_2)$值的符号；

（4）根据符号，指出函数是增函数还是减函数。

因此，要深刻理解和熟练应用概念，就应该对概念的语言叙述过程进行分解，以使学生掌握概念应用的操作程序。

第四节　概念教学中的错误概念问题

数学概念教学中，错误概念的产生和形成是一个需要注意的问题，教师应该研究其中的原因，并采取措施帮助学生纠正错误概念。

一　错误概念产生的原因

我们知道，个体要了解和适应环境，就必须对自己周围环境的事物进行观察和思考，而且事实上这种观察和思考从人刚出生时就已经开始了。通过这样的观察和思考，人们建立了自己对客观世界的理解，形成了许多日常概念。这些日常概念与人的社会生活环境密切相联，是人的日常生活经验在感性层次上的概括，并且成为他今后学习科学概念的出发点。学生就是以自己已经建立起来的日常概念为基础而开始他的学校学习生涯的。显然，这种日常概念的局限性是极大的，很容易导致学生对抽象程度很高的数学概念的错误理解。例如，日常生活中，"垂直"概念通常是以地平线为参照系的。在学习平面几何的"互相垂直"概念时，学生就常常不去分析、比较它与日常的"垂直"概念之间的区别，而以日常的"垂直"概念代替"互相垂直"的概念。这一点被国内的有关研究所证实。研究者在让某初二班级的学生作钝角三角形的三条高时，该班有50%的学生不知道应该怎样画，还有35%的学生作出的三条高如图2.4.1所示。很明显，这是受了日常建立的垂直概念的影响。

学生的错误概念除了来自他们的日常生活经验外，也有可能

是由于他们对事物的不全面理解而产生的错误推广，或由于对概念的内涵或外延进行不恰当缩减或扩张而造成，这是与学生的认知发展水平密切相关的一种错误。数学学习中产生这种错误的机会比较多。例如，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ （$a\neq 0$）最值的概念，学生记住的是"当 $a>0$ 时，函数 y 有最大值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$；当 $a<0$ 时，函数 y 有

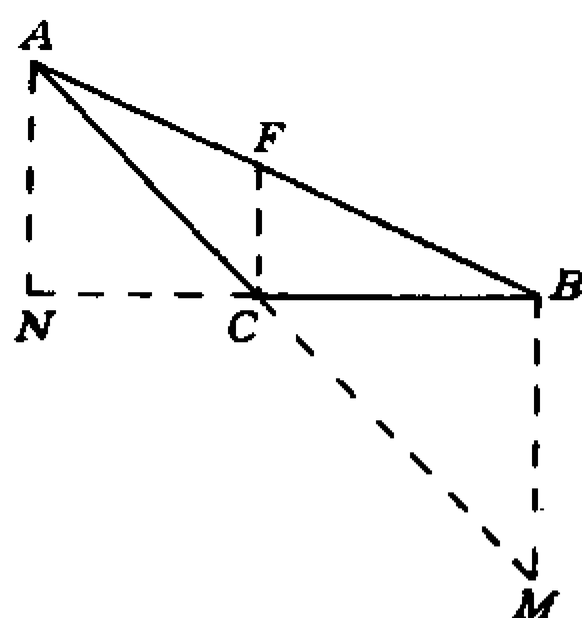


图 2.4.1

最小值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$。"而实际上，这一结果隐含着"函数的定义域为 R"这个前提条件，学生对它往往是不注意的。这样在解决某些给定区间的最值问题时就要出现错误。再如，函数的奇偶性概念，隐含了定义域关于 $x=0$ 对称这一条件，而学生在学习时，其注意力往往只在判断 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 之间的关系上，从而出现错误，如对于函数 $f(x)=(x-1)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$，学生只注意到有 $f(-x)=f(x)$ 成立，而没有注意到其定义域是 $-1\leqslant x<1$，并不具备作为奇函数或偶函数的必要条件，从而发生判断失误。

二　帮助学生纠正错误概念

前已指出，学生在走进课堂时，头脑中已经具有一些对事物的感性认识和日常概念，这些认识和概念对概念教学具有重要影响。如果学生对周围事物的观察正确、全面，那么他们建立的日常概念会促进数学概念的学习，如果日常概念与数学概念不一致，则会干扰数学概念的学习。而且，日常形成的错误概念先入为主，

比较根深蒂固，很难通过一般的课堂教学而得到改变。教师往往会对自己在纠正学生的错误概念时效果不够理想而感到困惑，认为自己已经反复强调了有关注意事项，学生似乎也已经明白，但为什么仍然在作业中出错呢？有的老师认为是学生记忆不牢固，于是就对新概念进行大量重复性训练，而事实上这样做的效果并不理想。我们认为，造成这种状况的重要原因是教师没有在教学过程中充分重视学生头脑中已经形成的日常概念的作用，没有认识到纠正学生头脑中错误概念的重要意义，而仅仅把教学简单地看成是传授新知识。

那么，究竟应该如何防止错误概念对数学教学的消极影响呢？显然，首先应该设法诊断出学生头脑中的错误概念，一般的，我们可以采取提出一些相关问题让学生回答的办法，以比较学生头脑中的日常概念与科学概念之间的差异，再设法判断产生这些错误概念的实际背景。在找出差异及其产生背景后，再给学生提供相应的感性经验，使学生能够经历概念的概括过程。这里，教师除了要对学生讲授正确概念外，还要注意设法使学生认识到已有日常概念的错误之处，可以采用课堂讨论的形式，也可以利用适当的练习，纠正错误概念，强化正确概念，逐步地用正确概念取代认知结构中的错误概念。例如，学习“角”概念时，学生一般认为“角”是由两条直线交叉而成的，这是日常生活中对“角”的认识。在平面几何中教学“角”概念时，教师就应该注意到学生认识上的这一局限性，引导学生用运动的观点，对“角”的产生过程进行认识，特别是对“平角”、“圆周角”这样的特殊角进行讨论、鉴别，以获得对“角”的本质特征的重新认识，纠正原有理解上的不足，建立完整正确的“角”概念。

第五节　概念教学的策略

概括上述各节的有关论述，结合心理学家提出的概念教学的策略，我们引述一些概念教学的方法①。

1. 当正面的事例和反面的事例有明显的区别时，在正面的例子都非常一致的情况下，最容易习得概念。例如，“算术根”与“算术平方根”由于区别不太明显，教学就比较难；而三角形、四边形这些概念就比较容易教，因为它们的特征很容易识别，与其他图形的区别也很容易。

2. 有大量实在属性的概念问题，比缺乏实在属性的概念问题更加容易解决。这意味着，为问题解决提供的线索越多，就越容易使问题获得解决；而给抽象的概念建立起具体模型，更有利于概念的掌握。例如，如果给公式$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$（$a$，$b\geqslant0$）配以图形解释，学生将比较容易而且牢固地掌握公式。

3. 在为学生提供教学情境时，要对正例与反例作出恰当的组合。在开始学习某个概念时，从正例中获得的信息比从反例中获得的信息更多些。这可能是由于学生在日常生活中的学习一般都伴随着正例的缘故。但在对学生进行从反例中获得信息的训练后，这种倾向会消失。

4. 通过减少无关属性的数量，可以比较容易地习得概念。例如，在数学教学中，我们经常采用的突出关键属性的方法，就是这一原理的应用。

5. 概念学习的技能是随着年龄的增长而发展的。所学习的概念的抽象程度应该与学生的思维发展水平相适应。

6. 焦虑是与概念学习相关的。在学习简单概念时，焦虑的增

---

① 施良方．学习论．北京：人民教育出版社，1994，5．452

长会导致更快地习得概念，但是，在学习复杂概念时，焦虑对学习会起破坏性的影响。

7. 如果告诉学生如何注意相关属性，会有助于概念学习。

8. 为了使学生更加容易地掌握概念，应当并排地呈现正例和反例。这样做更加有利于学生对本质属性与非本质属性进行比较。

9. 在有些情况下，同时呈现若干正例似乎更有利些。这里的正例应该是概念的各种变式，否则会起不到应有的作用。

10. 如果学生用自己的语言来表述相关属性，则能更好地习得概念，而且比较容易应用于新的情景。学生用言语来表述无关属性，也能从中获益。

11. 在有些情况下，学生动手操作实物或模型，比只用眼观察更容易习得概念。

12. 反馈越完整，学习效果就越好。学生能经常意识到自己的学习进程，知道正确或错误的原因，将有助于概念学习。教师给学生的反馈信息要准确、完整，任何模棱两可的信息或错误信息，都会干扰概念学习。

13. 如果概念是通过全面地研究和分析概念的不同事例后获得的，那么就最有可能把它迁移到新奇的事例上去。这是我们平时所说的“举一反三”的前提。

14. 应该在概念的系统中教学概念，要注意建立起概念之间的联系。在给学生教一个新概念时，要为他们建构一个可以把该概念置于其中的框架。孤立地教学概念，将限制学习的价值。

15. 应该混合使用概念教学的各种方法。

16. 在学生学习概念时，必须要有足够的时间保证。学生学习概念需要有一个相对较长的时间，教师千万不可急于求成。

17. 许多概念是相互联系在一起习得的。例如，函数这个概念是与函数的定义域、值域、对应法则、单调性、奇偶性、极值等概念紧密联系在一起的。

第三章　数学知识的学与教

第一节　知识与数学知识

一　什么是知识

知识到底是什么，目前仍然有争议。我国对知识的定义一般是从哲学角度作出的，如在《中国大百科全书 教育》中的定义是："所谓知识，就它反映的内容而言，是客观事物的属性与联系的反映，是客观世界在人脑中的主观映像。就它的反映活动形式而言，有时表现为主体对事物的感性知觉或表象，属于感性知识，有时表现为关于事物的概念或规律，属于理性知识。"而西方许多心理学家则倾向于把知识看成是言语信息，即用符号或言语来标志某种事物或表述某些事实。显然，这种解释是对知识的一种现象描述，而不是对知识的本质揭露。我们认为，就其本质来说，知识是客观事物的特征与联系在人脑中的能动反映，是客观事物的主观表征。这里要作几点说明。

1. 知识是在主客体相互作用的基础上，通过人脑的反映活动而产生的。

2. 知识是主客体相互统一的产物。知识是客观的，但是知识本身并不是客观现实，而是事物的特征与联系在人脑中的反映，是一种主观表征。

二 什么是数学知识

根据上面对知识的解释，我们可以认为，数学知识就是客观事物在数与形方面的特征与联系在人脑中的能动反映。具体地说：

1. 数学知识是个体通过与客观事物在数与形方面的特征和联系的相互作用后获得的信息及组织。被储存于个体的大脑（长时记忆）里，就是个体的数学知识；通过书籍或其他媒介来储存，就是人类的数学知识。这里，我们强调数学知识的获得过程是主客体之间的相互作用过程，而就知识的范围来说，从获得具体信息到个体数学认知结构的根本改变，都属于数学知识的范畴。

2. 数学知识不仅表现为数学概念、定理、法则、公式等“言语信息”，而且还表现为数学思想方法等“策略性知识”。数学知识不仅包括它的储存和提取，而且包括它的应用，我们平时所说的“不但要知道是什么，而且要知道为什么，还要知道怎么用”就是这个意思。

3. 作为人脑对客观事物在数和形方面特征的能动反映，需要个体对反映过程进行主动的调控，而调控的前提是个体具有相应的技能，因此，主体有关对自己的数学学习过程的知识，也就应该成为数学知识的一个有机的组成部分。实际上，这部分知识就是心理学家所说的“元认知知识”。

三 数学知识的分类

要对数学知识进行分类，必须事先建立一个分类的标准，而分类标准又可以根据不同的侧面来给出。例如，心理学中常常以反映水平及表征形式为标准而把知识分为（1）感性知识（感性表征），包括感觉、知觉和表象，这是反映事物的外表属性和外部联系方面的知识；（2）理性知识（理性表征），包括概念、命题和图式，其中，概念和命题是反映事物本质属性和内部联系方面的知

识，图式则是同一主题的知识块。当今比较流行的则是按照表述形式将（语义）知识分为（1）陈述性知识，这种知识主要是说明事物是什么、为什么和怎么样，用它们可以区别、辨别事物；（2）程序性知识，指做什么、怎么做的知识，这是一种在特定条件下可以使用的一系列操作步骤或算法，是一种技能性的知识；（3）策略性知识，这是一种关于如何学习、如何思维的知识，是关于如何用陈述性知识和程序性知识来学习、记忆和解决问题的一般方法。

我们认为，数学知识也可以有不同的分类方法：

1. 按照研究内容的特点，可将数学知识分为：代数、几何、分析（微积分）、概率统计……；

2. 按照表征形式，可将数学知识分为：概念、性质、法则、公式、公理、定理；按照一定程序与步骤进行运算、处理数据、推理、作图、绘制图表等技能；数学思想和方法。

关于数学知识的分类，我们认为其意义在于帮助人们更加深入地认识数学知识的本质，从而建立起掌握知识的标准，并以此为依据而提出数学学习的策略。值得指出的是，我们所认同的数学知识观是广义性的，这里既包括数学的概念、性质、法则、公式、公理、定理等数学知识系统的“硬件”，又包括运算、处理数据、推理、作图、制表等技能，即操作手段，并且还包括数学思想方法这样的数学知识系统的“软件”。只有建立起这种将知识、技能和策略融为一体的广义数学知识观，才能在数学教学过程中，对学生提出全面的数学学习要求，这就是下面要谈到的关于数学知识的掌握问题。

第二节　数学知识的掌握

一　什么是知识的掌握

我国教育学、心理学理论对知识的掌握所持的普遍观点是把它分为三个阶段，即领会、巩固和应用。知识的掌握过程就是通过一系列的心智活动，在头脑中建立起相应的认知结构的过程。教师、学生和传输知识的媒体是知识的传递系统中的三个基本要素。教师是知识的传授者，学生是知识的接受者。由于所学的知识是前人已认识成果，因此学生的学习不必重复前人认识的原过程，不必经过那么多的尝试与错误，学生的学习是一种"再创造"。尽管学生的学习是接受式的，但是，由于知识是一种主观经验，因此知识的传递并不能像物体的传递那样进行，教师不能把知识像食物一样地"喂"给学生，学生也不能从教师那里接收到现成的知识。知识的掌握必须经过学生自己的一系列智力加工活动才能实现。

国际上，有的心理学家（诺曼、鲁梅哈特等）根据图式理论，提出了知识掌握的增生、重建和融会贯通三阶段理论。具体说就是：

1. 增生阶段：这一阶段学生接触到各种各样的知识，包括名词、术语、事件、理论解释等，它们的抽象程度千差万别，相互之间的联系性也不明显，对学生来说它们好像是外来的。学生力图使这些材料与自己已有认知结构之间建立联系，在这个过程中，材料所提供的信息以相对孤立的方式被已有认知结构同化，成为零碎的事实或命题。在这一阶段的教学中，教师重点考虑的应该是从学生熟悉的生活环境中挖掘有用的材料，通过这些材料来启发学生开展同化活动。学生的学习方法一般是重复性的。由于这

时的知识是相对孤立的，因此一般不易迁移。所以，在这一阶段，评价学习的主要依据是简单再认和有提示的回忆。

2. 重建阶段：由于重复接触和由此产生的经验的作用，一些观念和其他观念建立了联系。经过重建过程，这些联系形成观念之间关系的模式。例如在概念的学习过程中，学生头脑中最初的概念是以原型的形式表征的，没有精确的定义。随着学习的深入，概念会变得越来越精确，并通过操作性术语加以定义。到了重建阶段，概念属性的各个方面就在概念内和概念间建立了各种联系。这时可采用发现式教学法，而学生则需要有相应的学习方法，如通过对材料的分解、分析、组织和重新组织等，发现概念中各要素之间的联系方式、概念之间的关系（如部分与整体、上位与下位、条件与结论等），而且要能够对关系存在的原因作出说明。这一阶段的评价方法一般是"论文式测验"，要求学生解答问题，在有限的范围内应用知识。

3. 融会贯通阶段：这一阶段中，学生头脑中的知识已经模式化，并且是根据深层次结构组织起来的。事实上，如果数学概念是从大量的、丰富的背景中产生出来的，也即学生不但掌握了数学概念的抽象定义，而且还掌握了丰富的数学概念的具体背景材料，那么，这时学生掌握的数学概念就应该被看成是一个具有普遍意义的模式；同样的，学生头脑中的数学定理、公式、法则、公理等，如果是有丰富的具体背景的支持，那么就可以被看成是模式，而且，就它们的存在形式来说，是处于一种数学知识系统结构中的，它们之间保持了内在的联系性。达到融会贯通的知识可以在新的情景中灵活地、自动地与其他知识一起发挥作用。

有人（张庆林，1992 年）认为，融会贯通的知识应当做到条件化、结构化、自动化和策略化。所谓条件化，是指在学习知识时，同时要掌握这些知识的使用条件；在记忆时，要将知识与该知识应用的"触发"条件结合起来。结构化是要求知识在头脑中

形成一定的层次网络，而不是零碎的、孤立的和杂乱无章的；在知识的组织上要加强上位知识与下位知识之间的联结，从而能够顺利地实现从具体到抽象（如对当前问题的类属判断）和从抽象到具体（如理解抽象知识的实际例子，抽象知识有具体模型的支持）的动力传递。实际上，结构化的知识由概念和原理作为网络的“结点”，因此有重点突出、体系组织简明清晰、概念和原理之间的相互联系紧密、易于理解掌握的特点，由于有了这些特点，因而使知识易于记忆，能够抑制遗忘，并且便于联想，具有迁移和应用的活力。关于“专家”和“新手”在知识表征上的差异研究表明，“专家”头脑中的知识是按层次排列的，“新手”头脑中的知识则采取水平排列；面临问题时，“专家”更加注重于问题的结构，而“新手”却更多地注意问题的表面细节。自动化则是指不但要注意某一知识（概念、定理、法则、公式等）内部各要素之间的内在联系性，此知识与彼知识之间的相互联系性，而且要通过有效的练习使它们紧密地结合在一起，并达到自动化的程度，这样的知识可以在头脑中表征为一个知识块，使之在记忆中占据较少的空间，而在应用时可以实现自动联想。策略化是要求在头脑中储存有关如何学习、如何思维的策略性知识，而在具体的知识学习和问题解决过程中，能自觉地运用它们来监控自己的学习或问题解决过程。在学习过程中，头脑中的注意力要在高层的策略性知识与低层的陈述性知识及程序性知识之间相互转换，不仅意识到当前的加工材料，而且要意识到自己的加工过程和加工方法，不断地反省自己所采取的策略是否适当，并及时调整自己的加工过程。

研究表明，在某一领域内，需要经过几千小时的有效训练，并在训练中形成大量的经验才能达到融会贯通阶段。这一阶段的教学应该让学生进行变式训练，在与相关知识的联系中应用知识，并要给予及时的矫正性反馈，以使学生对概念的理解达到足够的深

度和广度。训练中应当注意问题情境的变化性、开放性，使学生能够得到选择、决策、排除困难等训练。学生在学习过程中应该注意把知识的练习和应用结合起来，并注意及时地反思和总结，以逐渐培养起对知识应用的自我监控，使知识的提取和应用处于较高的自我意识水平之下，提高知识的应用层次和效率。

二　数学知识的掌握

根据上述理论，我们认为，数学知识的掌握，从过程来说，也可以分为增生、重建和融会贯通三个阶段，不过又有数学学习本身的特点。

1. 增生阶段。由于数学学科的高度抽象性和系统性的特点，而且数学抽象具有层次性，因此在增生阶段，学生对所接触的数学材料的感觉并不一定是“神秘感”，更多的是在学习过程中所自然产生出的疑问，这种疑问会引导学生从一个层次走向下一个层次。而就某一个层次的数学学习来说，在增生阶段首先需要学生自己的亲身实践。例如，几何知识的掌握过程中，学生首先是从具体材料的操作活动（如搭积木、折纸、剪纸、粘合、画图、测量等）中获得关于几何的直观感觉，借助于手、眼等感觉器官来发现空间形状，形成关于空间形状的表象。

2. 重建阶段。数学学习中，重建阶段是增生阶段发展的一个自然结果（有时这两个阶段的划分是非常困难的）。例如，几何学习中，通过上述试验过程而获得的笼统印象，必然要进入到对几何元素（点、线、面）及几何图形的相互关系的演绎推理层次，通过对图形关系的考察，获得相应的理性认识，建立起几何空间结构。

3. 融会贯通阶段。在融会贯通阶段，主要是通过数学解题活动，形成数学技能，掌握数学思想方法。

数学技能是通过数学学习而获得的一种动作经验，是符合

"数学活动规则"要求的数学活动方式。这里,"符合'数学活动规则'要求的活动方式",是指数学活动动作(主要是心智动作)的构成要素及其执行程序,必须体现数学活动本身的活动规则的要求,而不能是随意的,也即是要遵守"数学共同体"所形成的共同规范,用数学共同体的所有成员都接受的语言来表述思想,对共同体公认的有意义的问题进行解答,而且所给出的解答是建立在共同体所一致接受的论证之上的。只有这样的活动方式才能对活动本身具有广泛的自我调节功能。虽然数学技能有时表现为一种操作活动方式(如作图、测量、使用计算器等)即操作技能,但主要还是表现为心智技能,它是借助于头脑内部的数学语言来实现的,其动作对象是数学观念,依赖于数学活动模式的内化才能形成,在数学活动中的作用在于控制心智动作的执行。因此,在数学教学活动中,为了使学生达到融会贯通阶段,教师不但应当使学生知道数学知识的表述方式,形成应用数学知识的操作手段,更主要的是应当使学生形成正确的数学观念,知道数学学习应当遵守怎样的"共同规则",从而实现对自己的数学学习活动的自我控制和调节。

数学技能对学生的数学学习活动的自我调节功能,主要是在活动的控制执行环节中体现。面对一个数学问题,学生通过阅读思考,了解问题的性质,确定解决问题的方案,即确定达到目标的动作程序,然后再将方案在活动的控制执行环节中付诸实施,这一过程中,数学技能就发挥了至关重要的作用。这种重要性主要表现在三个方面:第一,它决定了数学智力活动的执行顺序。因为活动顺序反映了数学问题发展变化的要求,因此这种活动顺序必须在执行中得到控制,与数学问题的发展变化保持一致,才能导致问题的解决。要使活动顺序在执行环节中得到控制,则必须使学生头脑中建立起前后动作相继发生的活动经验链索,而技能就是一种链索型的动作经验。例如,解一元一次方程,就有去分

母、去括号、移项、合并同类项和用未知数系数的倒数乘方程的两边等五个步骤，当这些操作性知识经过实际操作训练，使学生获得了一种动觉经验后，就成了一种技能即链索型动作经验。所以，借助于数学技能，就能使数学活动的顺序在执行环节中得到直接的控制。第二，数学技能决定了控制每个活动的执行方式。因为在数学问题解决活动中，必须根据问题中的信息的特点，选择对信息的处理及变换方式，而这就需要有相当的活动经验，才能在执行环节中确保活动的完成。例如，代数问题的几何解释、几何问题的代数表示、解方程中的变量代换、代数应用题中未知量的合理选择等，都体现了数学技能在活动执行方式方面的作用。第三，数学技能决定了数学智力活动的效率。在解决数学问题的过程中，既有会不会、能不能的问题，又有完成时间的长短问题。数学技能在提高数学智力活动效率上的作用，既体现在对问题的观察、分析方面，又体现在相关知识的选择方面，还体现在活动过程中的及时调节控制方面。数学技能水平高的学生不但表现出活动的正确率高，而且还表现出活动过程设计合理，对相关知识的选择准确、迅速。

在数学知识的掌握中，只有掌握了数学思想方法才是真正达到融会贯通。众所周知，在数学研究过程中，对于所考察的对象，首先必须搞清楚它的内容是什么。一般来说，内容存在于事物的内部，因而并不能被一眼看穿，要想搞清楚并紧紧抓住它确非易事。但是，只要能够认真剖析，着眼于它与相关内容的联系，着眼于它的运动变化过程，我们还是能够掌握它的。第二，要认识清楚内容的各种变化形式。我们知道，事物的表现形式是具体的，可以是多种多样的、丰富多彩的。例如，一个数学问题往往既可以表示为代数形式，又可以表示为几何形式，而在代数表示中又可以表示为方程形式、函数形式等。所以，在进一步认识它时，应该选择一种合适的形式表示它。第三，由于形式是运动变化的，因

此，特别重要的，是要对这种运动变化的规律进行循序渐进的、深入细致的认识，也即要在变换形式的过程中来掌握内容的精神实质，这一过程中体现了数学思想方法的重要性。学校中的数学学习过程与上述过程有所不同，它是依据教材，在教师的主导下进行的“再发现”过程。数学教科书是用数学语言符号来表述数学知识的一种逻辑体系，它是数学内容的一种表现形式。而数学思想方法则是对这种形式的认识，具体地说，即是对知识内容的内部运动变化规律的认识，因此，我们应该把数学教科书看成是内容与思想方法的统一体。这样，数学学习要根据相应的表现形式来认识内容的精神实质和思想方法。一般来说，首先是认清形式所反映的内容是什么，还要认识形式的变化、变换方式（即各种各样的“变式”），在这个认识过程中，注重数学思想方法的学习与体验。这里，“变式”是为更深刻地认识内容的精神实质和思想方法服务的，而且，由于内容的本质和思想方法容易被形式所掩盖，因此，“变式”对于揭露数学知识的本质和思想方法具有非常重要的意义，它可以使“再发现”的过程既简约又有效，使数学知识的各个侧面的本质特征更加显露突出，有利于学生“透过现象看本质”，在形式的运动变化过程中认识内容，体验数学研究的过程、数学思想方法的真谛。因此，数学思想方法的掌握是数学知识掌握的最重要标志。

数学思想方法有层次之分：

第一层次是与某些特殊问题联系在一起的方法，我们可以将它称为“解题术”，如求函数最大值的“Δ法”，比较两个数之大小的“差值比较法”，证明三点共线的“面积法”，立体几何中证明点共线的“相交平面法”、共面问题的“体积法”等等。这些方法都是在某种特定的情景下才能发挥作用，具有比较固定的操作程序。许多复习用书、数学杂志上介绍的所谓“数学思想方法”大部分属于“解题术”这一层次。

第二层次是解决一类问题时可以采用的共同方法，我们将其称为“解题方法”，如代入法、消元法、换元法、配方法、三角法、割补法、坐标法、数学归纳法、待定系数法、反证法、数形结合法、构造法等。这些方法的操作程序不是非常具体，但适用的范围比较广泛。

第三层次是数学思想，这是人类对数学及其对象，对数学的概念、命题、法则、原理以及数学方法的本质性认识，在数学研究范围的拓展、研究对象的延伸、数学方法的形成、各种方法之间的融合并发展成新的方法等之中都体现出数学思想的核心作用，它虽然程序性弱，但功能性强。数学知识和方法是形成数学思想的基础，但有了知识不等于就有思想，方法如果没有思想作为灵魂，就只能是一种机械的“操作手册”。思想是对知识融会贯通的理解和升华，有思想的知识才是具有自我生成能力的知识。数学的概念、公式、定理、法则等都是静态的，而数学思想却是动态发展的，富有思想灵魂的数学知识具有良好的新知识自我生成能力。因此，只有掌握深层次的数学思想，才算掌握了数学知识的核心。常用的数学思想有：分类思想、化归思想、函数思想、数形结合思想等。

第四层次是数学观念，这是数学思想方法的最高境界，是一种认识客观世界的哲学思想。“数学观念系统是相对于数学知识系统而言的一种为数学知识系统建立合理性标准、价值标准，决定内容的构建原则、组织形式和推理方式，提供研究规划的基础并直接影响着数学中的发现、发明与创新法则形成的共同预设或元知识层次。”从组成成分来说，有数学的基本思想、基本方法、基本态度。①

---

① 丁尔升，主编．中学百科全书·数学卷．北京：北京师范大学出版社，上海：华东师范大学出版社，长春：东北师范大学出版社，1997，2. 390

在长期的数学研究实践中，“数学共同体”逐渐形成了对数学的相对一致的看法，这种看法凝聚在数学知识体系中，因此，数学知识系统蕴涵着人的思想、观念，反映了认识主体的信念、意向、行为准则和思维方式。数学观念系统引导并且制约着数学的发生和发展，就像“一只看不见的手通过认识模式控制着知识系统”。从本质上来说，数学的重要进展是由数学观念的重大突破为标志的。数学观念具有解释性功能，它激励人们发挥想象力，并为想象力指明方向。①

数学观念与数学基本思想、基本方法既有联系又有所区别。在数学知识的背景下，数学基本思想在活动中经过积淀、凝结而成为数学观念。观念是思想的综合、概括和内化。思想受具体问题情景的启发而有易变性和活跃性，观念往往脱离具体情景而比思想更加稳定、内在。数学观念在思维的全过程中都要发挥作用，主要表现为对思维的意识、控制（出发点、指向、依据）。数学观念可以分为技术性成分和哲学性成分。②技术成分如抽象意识、推理意识、整体意识、化归意识、推广意识和应用意识等（实际上与数学思想相当），它对数学方法的形成、对灵活地支配和运用这些方法有重要价值，对解题策略的形成也有直接的影响。哲学性成分在反思的过程中形成，主要指经过提炼、升华形成的信念，它能给所有反应提供方向和力量。它对数学态度的习得和组织有重大作用。

数学的学习与教学，应发展起学生的数学观念或数学头脑，这种数学观念实际上就是指对数学的根本态度。所谓一个人具备数学观念，实际上是指他已学会用数学的眼光来看待周围事物，能用数学的方法来处理周围事物，或者说，在他的头脑中，数学关

①② 丁尔升，主编．中学百科全书·数学卷．北京：北京师范大学出版社，上海：华东师范大学出版社，长春：东北师范大学出版社，1997，2．390

系已经成为他的一种基本思维模式。这样，当他面临新的事物时，就会习惯地将其归结为数学关系。如果学生在学校学习和教学过程中真正培养了数学观念，那么，在他离开学校走向社会后，即使没有机会具体使用数学知识，数学的具体知识逐渐淡忘了，但扎根于学生头脑中的数学思维方法、研究方法、推理方法等却能随时随地发挥作用，使他终身受益。数学教学中，追求数学观念的教育，实际上是从哲学方法论的高度对数学思想方法的本质内涵的理解，而这正是数学教学中贯彻素质教育思想，提高学生的科学文化素养的关键所在。

三　对数学思想方法的若干认识

（一）初等数学中，学生应该掌握的主要数学思想方法

1. 函数思想。客观世界中的事物是运动变化的、相互制约的，既相互依存又相互矛盾，从而推动事物的发展。这种关系在数学中集中反映在函数和函数思想上。变量思想是函数思想的基础，映射是函数的本质，数形结合、方程和不等式是函数思想的具体体现。这里，方程和不等式可以看成是常量与变量之间的制约关系，方程的解可以看成是特殊函数值所对应的自变量，不等式的解可以看成是函数值域的某个子集所对应的原象集的子集。

客观现实中之所以存在问题，是因为有“未知世界”，所谓解决问题实际上就是化未知为已知，转化的实现依靠联系未知与已知之间的“桥梁”，而“桥梁”的架设则体现了“设计师”的思想。数学中，方程或不等式是联系已知与未知之间的桥梁，函数反映了已知与未知之间的依存关系，因此，处理数学问题处处需要函数思想。

2. 分类思想。这是科学研究中的基本逻辑方法，当面临的问题情景复杂、层次众多、视角广泛时，我们可以选择一个适当的标准，不重不漏地将其分解为一系列情景简单、层次单一而且比

较熟悉的小问题，然后“各个击破”，再把解决了的小问题综合起来而获得对原问题的解决，这就是分类思想。其具体实施的结果就是把难度较大的问题转化成了难度较小的问题，实现了化难为易、化繁为简的目的。因为每一类情况都增加了一个前提条件，分散了问题的难点，所以分类实现了问题转化。初等数学中，从字母代表数开始，像绝对值概念、算术根概念、函数性质（单调性、奇偶性、周期性等）的讨论、指数函数、对数函数的定义和性质、排列与组合的区分、平面几何中各种图形性质的讨论（如弦切角度数定理的证明）、解析几何中方程对曲线位置及性质的影响的讨论、参数的引入及讨论等，都涉及到分类思想。可以说，分类思想贯穿数学研究的始终。

在具体教学中，概念教学需要区分概念事例的属性，建构认知结构的过程中需要分清知识之间的联系方式，在解决问题时需要对问题进行分析与综合等，这些都需要分类思想的指导。

3. 数形结合思想。数与形是数学研究对象的两个侧面，把数量关系和空间形式结合起来去分析问题、解决问题，就是数形结合思想。具体来说，数量关系获得几何解释，可以使问题变得直观形象，使人易于洞察问题的本质；几何问题得到代数表示，可以使抽象的推理论证转化为程序化操作的代数运算，实现化难为易的目的，并使人获得对问题的精确化、理性化的认识。代数给人以精确，几何给人以直观，“当这两门科学结合成伴侣时，它们就相互吸取新鲜活力，以最快的速度走向完善”。数形结合思想确切地反映了客观事物深层次的内在联系和矛盾统一的辩证规律。

4. 化归思想。客观事物是不断发展变化的，事物之间的相互联系和转化，是现实世界的普遍规律。数学中充满了矛盾，如已知和未知、复杂和简单、熟悉和陌生、困难和容易等，实现这些矛盾的转化，化未知为已知，化复杂为简单，化陌生为熟悉，化困难为容易，就是化归的思想实质，任何数学问题的解决过程，都

是一个未知向已知转化的过程，是一个等价转化的过程，所以，化归是基本的数学思想。

具体来说，加法与减法的转化，乘法与除法的转化，乘方与开方的转化，对数与指数的转化等是具体内容的转化，而从本质上来看，利用对数运算可以实现从高级运算向低级运算的转化，利用诱导公式可以实现任意角的三角函数向锐角三角函数的转化，利用三垂线定理可以实现空间问题向平面问题的转化。构造各种数学模型（如函数、方程、不等式、数列、几何图形等）是问题解决过程中转化思想的体现。

（二）数学思想方法在数学认知结构中的地位

从认知的角度看，数学学习过程是数学认知结构的不断建构（或组织与重新组织）过程，而图式的形成和变化就是认知发展的实质。图式是指学生对数学学习材料的知觉、理解和思考的方式。按照皮亚杰的观点，认知发展是受同化、顺应和平衡三个基本过程影响的。

1. 同化

在认知心理学中，同化是指个体将新的信息（与知识、观念等是同义词）纳入到他已有图式（认知结构）中的过程，就像消化系统将营养物吸收一样。同化有三种不同形式（或层次）：(1) 再现性同化，即基于个体对某一环境刺激作出的重复性反应；(2) 再认性同化，即基于个体在辨别事物之间差异的基础上作出不同反应的能力；(3) 概括性同化，即基于个体知觉物体之间的相似性并把它们归于不同类别的能力。(邵瑞珍，1990)

2. 顺应

顺应是指个体调节自己的已有图式（认知结构），以适应新的环境（刺激情境）的过程。这是对已有图式的修改或重建。

3. 平衡

要使个体与环境的相互作用能导致他认知水平的不断提高，

就必须有同化与顺应之间的某种均势，皮亚杰将这种均势称作平衡。

皮亚杰认为，个体的认知发展，从心理机能的角度看，是从外部感知运动开始的，个体出生后，以先天遗传的图式为基础，与环境进行相互作用，不断地对环境作用进行同化、顺应，实现动态平衡，从而使简单的图式相互作用、协调成为逐渐复杂化的图式，在感知运动阶段的后期，出现了具有包容关系、序列关系和一一对应关系的智慧动作图式。随着符号功能的出现，这三种动作图式逐渐内化成为三种最基本的内部运算图式。这三个基本结构是个体整个运算的基础。通过不断的同化和顺应，三个基本结构不断协调整合，从而建构起越来越高级的心理运算图式。从数学思维结构的角度来说，皮亚杰认为，数学思维的结构与数学科学的结构十分相似，数学有三种基本结构，即代数型结构、顺序型结构和拓扑型结构，从而，数学思维可以分成与数学的基本结构类型完全相同的三种结构。从学习以获得关于客观世界的经验的过程来说，个体接触新的环境信息时，首先会用已有图式去同化它，如果同化成功，则丰富了相应图式的内含，并得到暂时平衡；如果已有图式不能同化环境信息，个体便会作出顺应，即调节已有图式，或者构建新的图式，直至达到认识上的新平衡。总之，同化与顺应之间的不平衡，引起个体消除不平衡的心理倾向，使个体努力去寻找消除不平衡的办法，以达到一种新的、更高水平的平衡，这就是个体智慧发展的实质。当然，平衡是暂时的，环境刺激会不断地引起新的不平衡，而个体则依赖于同化与顺应这两种机能，通过与环境的相互作用，不断地使自己的认识从一种平衡状态过渡到新的、更高级的平衡状态。

就数学认知结构的组成因素来说，主要有数学的概念、定理、公式、法则、定义等以及它们之间的联系方式，数学思想方法，数学观念，以及作为数学认知活动动力系统的非认知因素。显然，数

学的概念、定理、公式、法则、定义及它们之间的联系方式是数学认知结构的"硬件"，是进行有效数学活动的"物质基础"，但它们本身并不具备能动性；数学观念是认知结构中的"监控系统"，在具体的数学认知活动中，它起着定向、控制和调节的作用，是提高数学活动的自觉性、正确性、速度和效率的保证，但它对数学活动所发挥的作用是宏观上的；数学思想方法融合于数学概念、定理、公式、法则、定义之中，是它们的精神和灵魂，同时，数学思想方法又是形成数学观念的前提，因此，在数学活动中，它既是活动的具体指导思想，又是活动过程中所必须具备的知识基础——既提供思维策略，又提供具体手段。所以，数学思想方法在数学认知结构中的地位是非常特殊的。无论是同化过程还是顺应过程，实际上都是已有数学认知结构与新数学知识之间进行相互作用，并实现从旧的平衡向新的平衡转化的过程，而转化是数学思想方法的核心与精髓。数学思想方法是数学认知结构中最积极活跃的因素。

（三）数学思想方法的教学

1. 数学思想方法的教学应落实在每一堂数学课上

那么，数学教学中应该如何引导学生学习数学思想方法呢？我们认为，以启发式教学思想为指导，注重数学学习的过程性、活动性，引导学生在学习过程中进行主动的思维，使学生有独立地发现问题、分析问题和解决问题的机会，一句话，就是要培养学生养成独立思考的习惯，这样才能使学生掌握数学思想方法。另外，数学思想方法的掌握是一项长期的任务，应该落实在每一堂数学课上。或者说，数学思想方法的学习不是空中楼阁，而是实实在在地反映在数学教学过程中的。这就要求数学教师在设计教学方案、实施教学过程时，应时刻注意利用数学知识的形成过程，使数学思想方法的教学融合在数学知识的学习过程之中。下面我

们试举一例。[①]

"n 边形的 n 个外角和等于多少度？"

为了解决这一问题，教师作了以下三张图（如图 3 .2.1）：

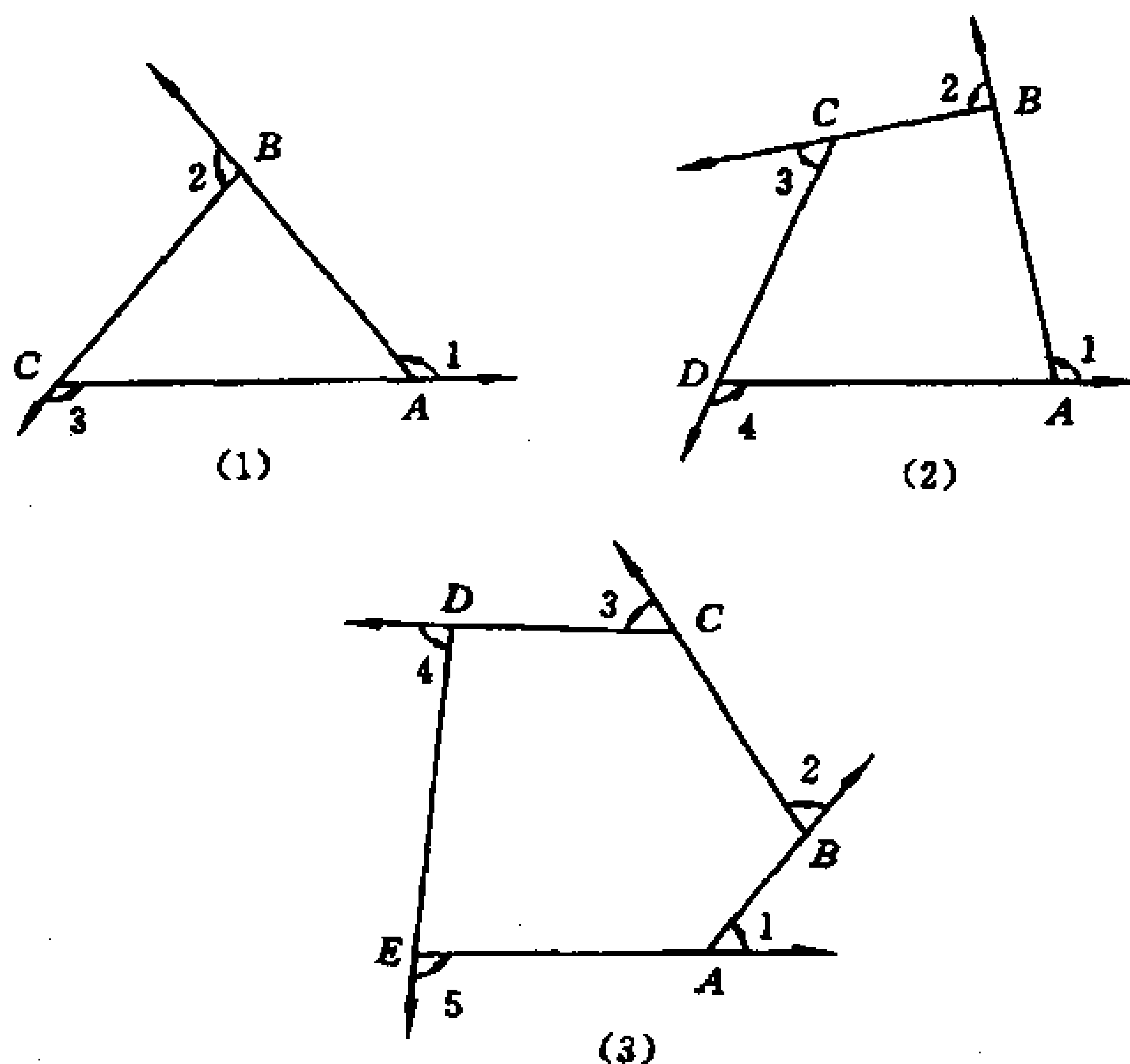


图 3.2.1

图中，（1）的三个外角和为 S_3；（2）的四个外角和为 S_4；（3）的五个外角和为 S_5。

"如果你站在图中（1）的 A 点，视线沿着 AP 的方向（图 3.2.2），第一次转一个角（$\angle 1$），使你的视线方向为 AB，第二次

① 中国著名特级教师教学思想录·中学数学卷．南京：江苏教育出版社，1996，8.19

转一个角（∠4），使你的视线 AQ 与 BC 平行，……”学生从图上立即发现，∠4 与∠2 是同位角，因此相等。而两次所转的角正好是两个外角∠1 和∠2。再转第三次，使视线回到原来的位置 AP，所转的角与∠3 是同位角，于是，旋转了 360°，正好是三个外角的和，即 $S_3=360°$。接着再用同样的方法来研究 S_4，很快获得四边形的四个外角和也等于 360°。最后，几乎不用再进行直观操作，学生就能得出，n 边形的 n 个外角之和等于 360°。

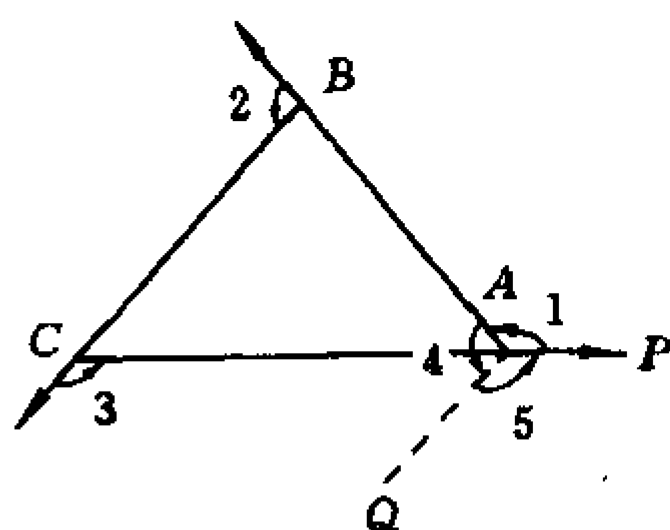


图 3.2.2

为了使学生的空间想象能力获得进一步的发展，教师又对图 3.2.2 的意义作了进一步深化：我们设想，让△ABC 的边 BC 平行移动至 B_1C_1，得图 3.2.3，这时，原来的三角形“变小了”，但是每一个外角的大小不变；继续让 B_1C_1 平行移动，使三角形继续缩小，而所得到的“小三角形”的每个外角与原三角形的对应外角总是相等的。这一过程可以一直进行下去，直到三角形“退化”为一个点（A 点），这时所有外角就聚到一点（都以 A 为角的顶点），它们组成一个 360°的角。

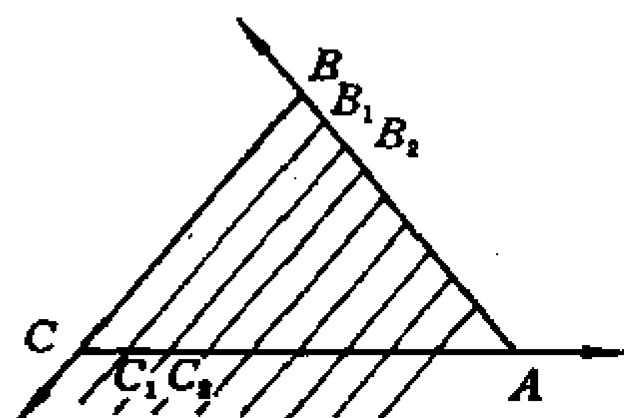


图 3.2.3

对于多边形，我们也可以作同样的想象。

当然，由于我们可以从不同角度来理解同一知识，因此，展示知识形成过程的方法也可以是不同的。上例中，我们还可以从多

边形的定义出发，利用内角与外角之间的关系来获得定理：由于多边形的外角是“多边形的角的一边与另一边的延长线所组成的角”，因此，多边形的外角是与它有公共顶点的内角的邻补角，这样，n 边形的内角和 $+n$ 边形的外角和 $=n\cdot 180^\circ$，而 n 边形的内角和 $=(n-2)\cdot 180^\circ$（这可以通过三角形内角和、四边形内角和、……的不完全归纳获得，也可以通过把多边形内角和转化为三角形内角和而获得），故 n 边形的外角和 $=n\cdot 180^\circ-(n-2)\cdot 180^\circ=360^\circ$。

以上两种方法各有特点。第一种方法比较形象直观，有操作、有想象、有分析、有归纳，是具体与抽象相结合的范例，但知识之间的相互联系性展示得不够充分；而第二种方法，知识之间的相互联系性暴露无遗，有分析、有归纳、有转化，是利用已有认知结构中的相关知识，通过同化和顺应，将新知识内化到认知结构中去的范例，但这种教学方法的直观性稍差，需要学生具有较强的认知能力，较好的知识基础。而它们的一个共同特点是：强调了知识的形成过程。

实践表明，通过向学生展示“n 边形的 n 个外角和等于 360°”这个定理的直观背景和抽象过程，学生的思维活动被激活了，通过他们自己主动的思维活动，不但掌握了定理，而且还受到了数学思想方法乃至数学观念的训练：从特殊到一般、从简单到综合，即一般化和特殊化思想；从直观到抽象不断转化，即化归思想；运动变化思想等。另外，通过这样的教学过程，学生也能从中体验到，数学不仅有严密的逻辑推理，抽象的演绎论证，在数学理论的产生过程中，也有直观、猜想、非逻辑性，也有合情推理。这种展示数学活动真实过程的课堂教学，使学生有机会看到数学知识的实际背景和抽象过程，使他们有机会开展主动的思维活动，通过自己的发现来获得知识，确实使学生的数学思想、数学观念得到了很好的培养和提高。从中我们也可以看到，数学思想方法乃

至数学观念的培养确实能够落实到每一堂数学课上。通过这样长期的、坚持不懈的努力，学生就能够较好地形成对数学的正确看法：数学并不仅仅只有抽象性、逻辑性、严密性，事实上，数学也是高度可观察的（直观的）、经常具有可试验性的科学活动。在数学的研究过程中，充满着直觉、试探、猜想，需要不断地调整思维方向，对已有的结果进行不断的修正，因此，理解数学的过程事实上应该是“直觉—试探—出错—思索—猜想—证明”，而不是“讲解—模仿和记忆—测验（考试）”。

必须指出的是，在数学思想方法的教学过程中，不论采取何种教学方法（发现法或讲授法），关键是要有正确的教学思想，把学生真正看成是学习的主体，把教学真正建立在学生自己的独立探索、思考、理解的基础上，真正给学生自己进行主动思维活动的机会，使他们在学习过程中有充分的自由思想空间，使学生有机会经历数学知识的发生发展过程。但是，在教学实践中，要做到这些并不容易，教师对学生的学习能力往往并不完全信任，他们总怕学生出错，总怕学生会浪费时间，总想搀扶着学生，甚至不惜去代替学生思维。而这些做法与培养学生的数学思想方法、发展学生的数学观念的要求是背道而驰的，也是与数学学习的本来面目不相符合的。因此，在数学教学中，我们应当从数学学习的自身特点出发，在使用抽象的数学语言和符号表述思想之前，通过可观察的（实物、图形、图表等）、描述性的、可亲身体验的形式来传播新的思想，从而引起学生的学习兴趣，促使他们自己去试验、构造，用他们自己的语言去阐述和解释，以达到对知识的真正理解。要为学生创造一种环境，使他们在其中能扮演自主活动的角色，有发挥自己的聪明才智进行创造性学习的机会，能自己去寻找需要的证据，获得能够反映自身特点的对数学原理的解释。我们应当把数学教学当作一种科学探索的过程（当然，它是在教师的指导下进行的），而不要把它当成是一种语言、一种高度

抽象的理论，甚至是一种宗教教义。应当努力促使学生形成自己对数学的理解，并能用自己的语言来表达这种理解，而不要只是追求所谓的精确性。因为在学生的数学学习中，精确而没有理解，理解但不精确的现象都不少见。通过死记硬背而一字不差地重述一个定理，在任何时候都不能与理解一个定理划上等号。正因为如此，一个成功的数学教师，在他的教学实践中，总是有意无意地在使用“发现法”。事实上，从教学思想来说，“发现法”与我国自古以来所提倡的“启发式教学”具有极大的一致性，两者都特别强调学生的自主活动，强调激发学生的学习动机，强调学习过程，强调对学习材料的本质理解。我们认为，极端的“发现法”（即排除教师的任何形式的指导）并不符合学校教育的实际，但是，在目前“机械学习”、“注入式”教学盛行的情况下，强调学生自己主动地“发现”具有非常积极的意义。

2. 数学思想方法的“训练序”

下面我们将介绍上海黄浦区朱成杰等所进行的“数学思想方法训练序”的研究，从中我们可以看到，数学思想方法的教学也可以从无序走向有序，从而可以改变数学思想方法教育的盲目性、随意性，增强自觉性、计划性。

首先，研究者对初中课本中出现或蕴涵的数学思想方法进行了归类统计，获得了一个频数分布表（见下页）。

表中数据是以节为单位，按照在本节中是否用到某一思想方法的标准进行计算，用到的计 1 分，否则计 0 分，最后累加而得。研究者认为，从统计结果可以看出，初中数学中蕴涵了丰富的数学思想方法内容，说明在初中加强数学思想方法不但重要，而且具有现实可行性。

数学思想方法	代数频数	几何频数	总频数
抽象概括	69	16	85
化　归	52	22	74
数学模型	49	59	108
数形结合	29	4	33
归纳猜想	28	13	41
分　类	16	11	27
类　比	20	6	26
特殊化	24	21	45
演　绎	37	66	103
完全归纳法	0	2	2
反证法	0	8	8
换元法	21	0	21
待定系数法	9	0	9
配方法	6	0	6

研究者将上表中的内容划分成了三种类型：第一类称为宏观型思想方法，包括抽象概括、化归、数学模型、数形结合、归纳猜想等，其中抽象概括、数学模型、归纳猜想等常常与数学知识的发生、发现过程紧密相联，是将现实世界进行数学化的重要方法；化归是处理数学问题时的基本思路，具有很强的思维导向功能；数形结合则反映了数学各科之间的内部联系和统一性，体现了人们对数学的总体认识。第二类是逻辑型思想方法，包括分类、完全归纳法、反证法、演绎法、特殊化方法等，它们都具有确定的逻辑结构，如演绎法，其主要形式是三段论，具有精确的逻辑表达结构。第三类叫技巧型思想方法，包括换元法、配方法、待

定系数法等，这类方法直接用于解题，具有一定的操作步骤。

在统计的基础上，实验者提出了“训练序”的概念。他们认为，尽管数学思想方法的形成要经历较长的过程，学生掌握数学思想方法并不能与理解知识、形成技能同步，比数学知识的教学要困难得多，但是数学思想方法的教学也可以做到由无序到有序地进行。以化归方法为例：

化归方法是指通过数学内部的联系和矛盾运动，在转变中实现问题的规范化，即将待解决的问题转化为规范问题，从而使问题获得解决的方法。所谓规范问题是指具有确定的解决方法和解题程序的问题，而将一个问题转化为规范问题的过程就叫规范化。实际上，化归就是通过转化将问题归结到某个已知的数学模式上。例如，一元二次方程及其相关知识（如判别式、求根公式、韦达定理等）是一个数学模型，将一个方程通过配方等手段转化为型如 $af^{2n}(x)+bf^{n}(x)+c=0(a\neq0)$，再通过换元而化归为一元二次方程，就是将问题模式化的过程。化归方法包含三个基本要素，即化归的对象、目标和方法。教学中，应当采取多次孕育的方法，结合数学知识的学习，让学生逐步体会到化归的基本思想，了解化归的基本步骤，逐渐掌握化归方法。

初中数学教学中，首先在有理数教学时孕育化归思想。例如，利用绝对值可以将有理数大小比较问题转化为算术数大小比较问题，有理数四则运算转化为算术数四则运算；整式加减的实质是利用同类项概念转化为有理数的加减。通过这两次孕育，学生体会到化归的基本思想是将新知识转化为旧知识。

在教学“一元一次方程和它的解法”时进一步孕育化归思想，使学生明确最简方程 $x=a$ 是解一元一次方程的化归目标，解方程的过程是：首先寻找所给方程与目标的差异，然后设法消除差异，达到化归目标，即化为最简方程。化归的具体方法是去分母、去括号、移项、合并同类项等。

在教“一次方程组的解法”时，除了使学生明确化归对象、目标和方法外，还要使学生理解一元一次方程在解一元一次方程时是化归对象，而在解方程组时却是化归目标，使学生初步认识到化归目标应当根据问题的要求而定，具有相对性。

在教学“一元二次方程”时，继续用化归思想指导解方程，在一元一次方程的基础上学习一元二次方程、简单高次方程、分式方程、无理方程、二元二次方程组，重点就是抓如何化归，掌握“降次”、“消元”的化归方法。通过用化归方法解上述各类方程的集中训练，强化化归方法，并引导学生归纳总结出：

(1) 化归方法有三个要素，即对象、目标、方法；

(2) 新知识可以通过一定方法化归为旧知识；

(3) 化归目标具有相对性和层次性，应当具体问题具体分析。

学完“一元二次方程”后，多数学生已经理解解代数方程的基本思路是：无理方程有理化，分式方程整式化，高次方程低次化；解方程组的基本思路是：通过消元、降次将方程组化归为一元二次方程或一元一次方程。至此，学生已经初步形成化归方法。

进一步的，在平面几何教学中，使学生认识到，复杂图形是由简单图形组成的，因此，只要在复杂图形中析出简单的基本图形，以基本图形作为化归目标，将复杂图形化归为基本图形，这就是解几何问题的化归思想；化钝角三角函数为锐角三角函数也是化归方法的应用，等。通过各种新的情景下的应用，学生对化归方法的理解得到了巩固、深化。

经过实践，研究者将数学思想方法的教学过程设计成多次孕育、初步形成、应用发展三个阶段，并编制出了《初中数学思想方法训练序》，对每一种数学思想方法都设计了若干孕育点、初步形成期和若干应用发展课题。他们认为，初步形成期的设计是关键，而数学思想方法的初步形成应满足：(1) 理解该思想方法的含义；(2) 初步掌握方法的操作步骤并能应用于较简单的情形；

（3）理解该方法的使用范围和局限性。另外，初步形成期应视学生水平和教学具体情况而定，如化归方法的初步形成期定在“一元二次方程”这一章，但学生水平高，确定在“一元一次方程”这一章也是可以的。

研究者通过实践，制定了一个初中数学思想方法初步形成期分布表：

	初一（下）	初二（上）	初二（下）	初三（上）
抽象概括				函数概念
化　归			一元二次方程	
数形结合				直角坐标系
数学模型			一元二次方程应用	
归纳猜想		三角形内角和定理		
分　类		实　数		
类　比	分　式			
特殊化			特殊四边形	
演　绎	证明			
完全归纳法				圆周角度量定理
换元法	可化为一元一次方程的方程			
待定系数法				求一次函数的解析式
配方法		一元二次方程		

从表中我们可以清楚地看到各数学思想方法的训练序。

最后，他们提出了进行数学思想方法教学的原则，即：

1. 化隐为显原则。数学思想方法需要有意识地进行教学，要使学生把数学思想方法作为明确的学习对象加以学习，因此，教学应当以知识为载体，把隐藏在知识中的思想方法揭露出来；

2. 循序渐进原则。数学思想方法教学应与知识教学相结合，与学生认知水平相适应，按照反复孕育、初步形成、应用发展的顺序完成，其中，结合不同知识，有意识地反复孕育同一个数学思想方法尤其重要。宜采取“小步走”、“多层次”的教学方法；

3. 学生参与原则。数学思想方法的教学是数学活动过程的教学，具有动态性，重在思辨操作，因此必须组织学生积极参与教学过程，才能逐步领悟、形成和掌握数学思想方法。

我们认为，这一研究成果，对于改变当前数学教学中普遍存在的重结论轻过程、重知识轻方法、重形式轻思想的教学现状具有现实意义，而且对提高数学教学的思想性进而通过数学教学培养和提高学生的素质也能起较好的作用。当然，由于数学思想方法的内存联系性、整体性，对它的教学也就应当有综合性、系统性，这是教学中应十分注意的。

第三节　从信息加工论看掌握数学知识的基本过程

信息加工心理学兴起于20世纪50年代后期，其后得到迅速发展。它以其新的理论观点和丰富的实验成果迅速改变着心理学的面貌，现已成为占主导地位的心理学思潮。

信息加工心理学的研究范围主要包括感知觉、注意、表象、记忆、思维和言语等心理过程，核心是揭示认知过程的内部心理机制，即信息是如何被获得、加工、储存和运用的。所谓信息加工观点，就是将人脑类比为计算机，把它看成类似于计算机的信息加工系统。当然，这种类比只涉及软件，而不涉及硬件。通过计

算机对人的心理过程的模拟，试图对人的认知活动，包括知觉、记忆、思维等作出一种解释，以期发现一般的信息加工原理。信息加工心理学的兴起迅速改变着心理学的面貌，它对人的心理活动，如注意、知识表征、记忆、认知、问题解决等的内部机制的研究，“似乎比以往任何一种心理学思潮都更好地表明心理过程的特殊性，也具有更多的心理学色彩。”①

另外，信息加工理论采用了许多计算机的名词和语言来阐述其观点，而这些名词和语言有很多是与我们熟知的心理学名词同义的。例如，“刺激信息”与“学习材料”、“信息”与“知识”、“信息加工过程”与“思维过程”、“信息编码”与“知识的理解”、“信息储存”与“记忆”、“信息提取”与“知识应用”、“信息网络”与“认知结构”等，都可以认为是同义词。在学习和理解信息加工理论时，如果注意到这些，会给我们带来方便。

数学学习活动，由于其学习材料的高度抽象性，具有比别的学科的学习更高的抽象性。因此，数学学习是人类高层次学习的典型，数学学习活动是研究人的高级心理活动内部机制的最好素材。这样，从信息加工观点出发，揭示数学学习活动内部心理机制的意义十分巨大。另一方面，为了更好地发挥数学教学在培养学生认知能力，特别是在培养学生的思维能力中的特殊作用，教师应该更加深入地了解学生数学学习的内部过程，更好地把握其内部机制，对数学学习过程中各种现象的因果关系作出准确判断，这样才能使自己对学生的指导真正做到有的放矢。因此，认真学习和研究信息加工理论，用信息加工观点指导我们的数学教育（特别是数学学习）研究，是深化数学教育研究的需要。

以下我们将结合信息加工心理学关于学习过程基本模式的介绍，阐述我们对数学学习过程的认识。

---

① 王甦，等著．认知心理学．北京：北京大学出版社，1992，4．21

一 学习模式

信息加工心理学的一个基本指导思想是把人看成计算机式的信息加工系统，认为行为是由大脑内部的信息流程决定的。学习实质上是由习得和使用信息构成的。显然，这种信息流程无法被直接观察到，因此，作为一种推测，认知心理学家构建了不同的模式来阐释这种信息流。就学习与记忆过程来说，我们认为加涅所采用的模式（图 3.3.1）是比较典型的。

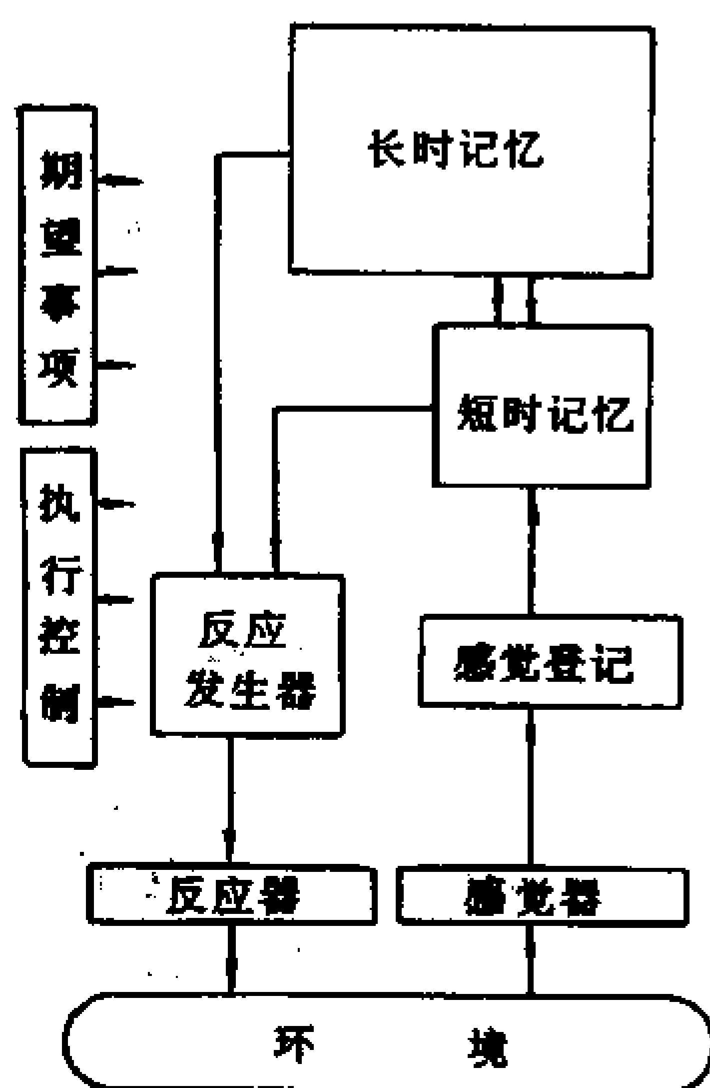


图 3.3.1

二 信息加工过程

（一）注意的过程

在上述学习模式中，信息首先进入感觉登记处，且延续时间很短。在感觉登记处的信息有一部分受到注意，并得到进一步的加工，这个过程被称为选择性知觉，它依赖于学生注意感觉登记处信息的某些特点而忽视其他特点的能力。这种知觉过程就是对信息的解释,它是一个现实刺激与已有知识经验相互作用的过程。当人进行知觉活动时，他的认知结构中的相关知识经验受到了适合于它的外部信息的刺激，于是这种相关知识经验被激活。处于激活状态的知识经验又进一步使人产生内部知觉期望，以指导感觉器官有目的地搜寻特殊形式的信息。因此，在知觉过程中，被激活的已有知识经验起到了指导知觉的作用。我们认为，这实际是强调了知觉过程的主动性和智慧性，也即强调了人的主观能动性。

信息加工心理学对知觉的研究主要涉及模式识别。所谓模式是指由若干元素或成分按一定关系形成的某种刺激结构。如几何图形、数学概念、公式、定理等都是模式的例子。一个人确认他所知觉的某个模式是什么，并将它与其他模式区分开来，这就是模式识别。这是一个典型的知觉过程，它依赖于人已有的知识经验。一般来说，模式识别过程是感觉信息与长时记忆中的有关信息进行比较，再决定它与哪个长时记忆中的项目有着最佳匹配的过程。而对这种匹配过程的实现方式或途径，信息加工心理学有几种假说。如“原型说”认为，在模式识别过程中，外部刺激只要与原型（它是一个类别或范畴的所有个体的概括表征，反映了一类客体具有的基本特征）进行比较，只要两者有最近似的匹配，即可将该刺激纳入此原型所代表的范畴，从而得到识别。而“特征说”则认为，在模式识别过程中，人们是根据刺激的一些重要

特征以及它们之间的重要关系来识别的。另外，一个模式常常不是孤立出现的，总是处于与其他模式或刺激的相互联系之中。这种联系性在模式识别中的作用，越来越引起心理学家的重视。总的来说，整体的结构在模式识别中能够起到很好的作用。例如，图3.3.2中，(1)中的两条直线的关系很难识别，而(2)中的两条直线的关系则很容易被识别。这种现象被心理学家称作"结构优势效应"，这种效应与人的知觉组织有密切关系。

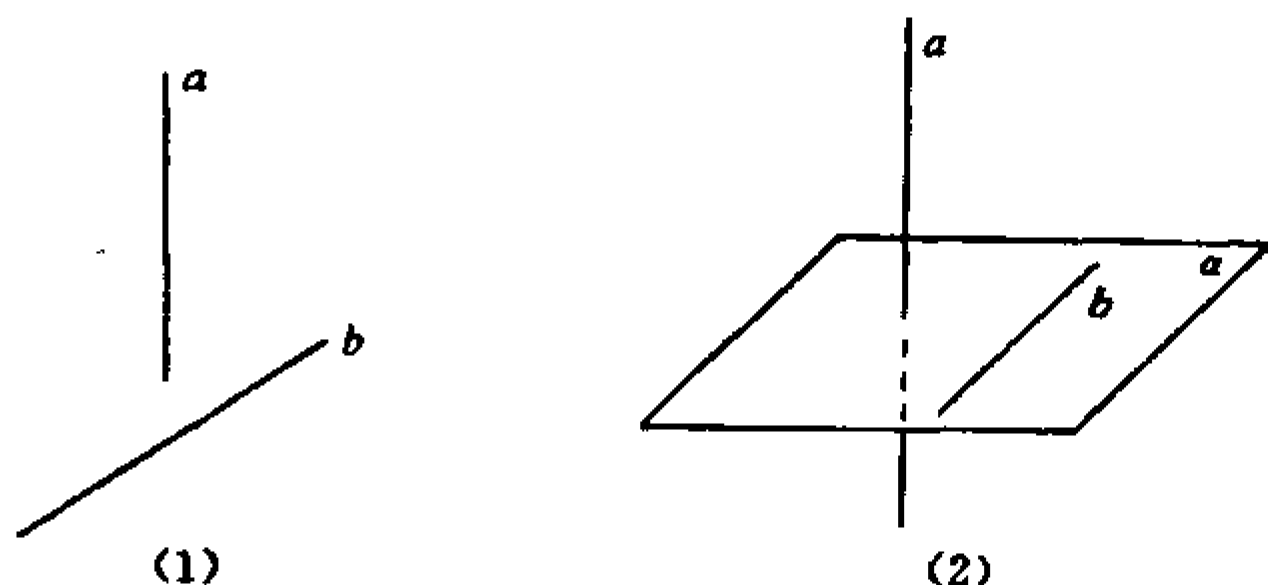


图 3.3.2

我们认为，信息加工心理学对知觉的这些研究，对我们在数学教学中如何向学生呈现知觉材料，组织学生的知觉加工，具有重要的指导意义。

(二) 短时记忆

当人们注意到刺激时，这些刺激就处于短时记忆中。要习得外来信息，则它必须由感觉登记进入短时记忆，并在短时记忆中得到加工。

短时记忆不但保持时间短暂，而且容量有限。除非我们不断复述或思考某些信息，否则它们会在20～30秒之内从短时记忆中消失。心理学家认为，短时记忆能够进行静止的、心理上的信息重复，以保持信息。这种复述有助于信息编码，为长时记忆作准

备。心理学家们公认，短时记忆容量为7±2，一旦超过这个限度，新进入的信息将“赶走”旧信息，这是短时记忆的一个突出特点。另外，短时记忆中的信息是以“组块”为单位的。所谓组块，举例来说，“数、教、心、学、理、育”中，每一个字都是一个“组块”，有六个“组块”；而将它们进行适当的组合，成为“数学、心理、教育”，则就成了三个“组块”；再组织成为“数学教育心理学”，则只有一个“组块”了。所以，组块实际上是一种信息的组织或再编码。人利用自己的知识经验对进入短时记忆中的信息加以组织，使之构成自己熟知的、有意义的较大单位。组块的作用就在于减少短时记忆中的刺激单位，增加每一单位所包含的信息量，从而可以在短时记忆容量限度之内增加信息量，以利于人完成当前的工作。另外，心理学实验已经表明，组块的方式依赖于人的知识经验。

我们认为，上述关于短时记忆的理论对数学教学的意义极大。首先，由于短时记忆容量有限，因此，在教学中，教师绝对不能在短时间内向学生呈现大量信息，也不能要求学生在短时间内掌握大量信息而不给学生以足够的加工或思考时间。否则，学生将只能是“狗熊掰玉米，掰一个丢一个。”7±2这个数字为我们在课堂教学中向学生提供多大的信息量提供了依据。其次，“组块”理论启示我们，为了增加学生短时记忆中的信息量，一方面应该提高学生已有知识经验的水平，使他们长时记忆中的知识以有意义的、相互联系的方式储存在一个组织有序的认知结构中，这将大大提高学生的组块水平，加大组块中的信息容量；另一方面，应当引导学生对刺激信息进行“预加工”，即要使学生学会利用自己的知识经验对信息进行组织，使它们成为“块状”。

（三）编码

当信息离开短时记忆而进入长时记忆时，信息将发生本质性转变，这个过程称为编码。经过编码的信息现在变成了一个抽象

的、具有概括性的或有意义的模式，以概念的方式被储存起来。

学习材料编码的基本策略是维持性复述和精致性复述。反复背诵学习材料就是一种维持性复述。而精致性复述则是以某种方式转换信息。例如，前面提到过的“组块”就是一种精致性复述的编码过程；另外，还可以把信息组织成为一种有意义的命题，使它与长时记忆中已经储存的信息联系起来；用另一种符号来替换它，或者用“等值语言”来表示它；增加其他信息，或者将信息置于某种情景之中，等等。编码过程也可以采取多种形式，如列表、画图、构造某种情境、进行丰富的联想或想象等。总之，经过编码以后的材料是一种有意义地组织起来的材料，而且信息编码的过程是一个信息的积极改变或转换过程。

必须指出，信息编码实际上从选择性知觉时就已经开始了，它是一个涉及觉察信息、分析信息的各种特征、提取一种或几种特征作为分类特征，并对此形成相应的记忆痕迹的过程。信息编码的方式对以后提取该信息的能力有很大影响。如果我们知觉不准，或分类特征不清，或记忆痕迹模糊，那么信息的提取就会非常困难。另外，信息编码的方式与过去的知识经验、学习材料的性质以及学习任务的性质都有关系：一个具有丰富知识经验的人，他既有足够的已有信息使新信息与之建立联系，又知道什么信息应该采取怎样的编码策略；有些学习材料可以采取维持性复述的方式编码，而许多材料则必须采取精致性复述的方式编码；如果学生知道学习的要求，那么他会以最能满足这一要求的方式来编码。例如，如果教师在教学某一内容时向学生提出，要以应用所学知识解决一个问题的方式进行考核，那么学生在学习时就会倾向于采用精致性复述方式进行编码，努力理解内容的本质，使信息之间尽量建立起广泛的联系。

由于数学学习材料的逻辑性强、抽象程度高，因此数学学习中，必须以精致性复述的方式，对学习材料进行编码，将它们组

织成为有意义的命题。教学中，教师应引导学生在寻找新旧知识间的联系上下功夫，掌握本质特征的不同表述方式（即能够用等值语言对信息进行编码)。要向学生展示数学知识的发生发展过程，这是为学生在学习过程中扩大信息量，为回忆提供线索的最好办法。另外，要充分利用数学学习材料本身的特点来帮助学生进行编码，例如，可以采用“概念图”的方式，将数学概念按照它们的逻辑关系进行编码；还可以用对比的方式，将某些既有联系又有区别的材料（如实数与复数、平面几何与立体几何等）按照它们的共性与个性关系进行编码；还可以采取数与形结合、数与形相互转换的方法进行编码等。总之，由于数学学习材料的相互联系紧密，因此在对它们进行编码时，应当努力按照这种联系性将它们有意义地组织起来。

（四）长时记忆

信息编码的目的是为了把信息储存在长时记忆中。心理学家从信息加工的操作来看记忆系统，提出了记忆的加工水平说，认为作用于人的刺激要经受一系列不同水平的分析，从感觉分析开始，到较复杂的、抽象的、语义的分析。随着加工水平的深入，信息在记忆中留下的痕迹越来越强(记忆痕迹是信息加工的副产品，痕迹的持久性是加工深度的直接函数)。人通过精致性复述，使刺激信息得到组织，并将它与其他信息联系起来，从而使信息在更深的层次上获得加工，并转入长时记忆。

长时记忆是一个真正的信息库，其容量无限，且可长期保持信息。信息加工心理学对长时记忆的研究有两个突出的特点[①]：第一，认为长时记忆可分为不同类型或系统；第二，着眼于长时记忆的内部加工过程，重视信息的内部表征和组织。下面我们将对信息加工理论关于长时记忆的类型（知识表征的方式）研究进行

① 王甦，等著．认知心理学．北京：北京大学出版社，1992，4．170

介绍。

1. 情景记忆与语义记忆

这是 1972 年加拿大心理学家图尔文（Tulving）在《记忆的组织》一书中给出的区分。这种区分已为大多数心理学家所接受，这两个术语也很流行。

情景记忆是指个人对一定时间和空间背景里所发生的事件的记忆。情景记忆所保持的信息总是与个人经历中特定的时间或地点相联系。例如，两个学生针对一个数学问题展开讨论，经过相互启发、争论，他们获得了一种超出各自原来想象的、十分优美的解法，这种情景在他们的脑海里留下深刻印象，争论的每一个细节都历历在目。这就是一种情景记忆。

语义记忆是指对语词、概念、规则和定理等抽象事物的记忆，如对语法规则、数学概念、定理和公式等的记忆。语义记忆所储存的事物不依赖于个人所处的某个特定的时间或地点，如 $\sin 90^\circ = 1$，三角形内角和等于 180° 等，它们具有抽象和概括的特点，可以用一般的定义来描述。语义记忆包含事物的意义，储存着我们运用语言所需要的信息。

情景记忆与语义记忆的区分是比较容易的，它们所储存的信息在性质和组织方式上都有差别。情景记忆以个人经历为参照，以时间空间为框架，有人认为它经常处于变化之中，易受干扰，提取也不太容易；而语义记忆则以一般知识为参照，是一种概念储存，比较稳定，容易提取。情景记忆储存特定时间的个人事件，其推理能力较小，而语义记忆储存一般知识，其推理能力较大。这说明语义记忆与人的智能和认知活动似有更密切的关系。

值得指出的是，语义记忆与情景记忆是有相互联系和相互作用的，可将它们看作一个连续体的两端。例如，在数学定理的学习过程中，学生根据教师或教科书所呈现的关于该定理发生发展过程的情景，对定理进行编码加工和记忆，在学生对定理从开始

接触到熟悉到灵活应用的过程中，他对定理的记忆也从开始的比较多地依赖于情景（对数学学习来说，这是一个必须经过的、重要的阶段）逐渐地转变成为语义记忆。在这一转变过程中，对情景的不断抽象概括起到了关键作用。因此，从情景记忆与语义记忆的区分中我们可以得到启示，在数学教学过程中，为了使学生牢固掌握知识并能灵活应用，教师首先应该为学生提供知识的丰富背景，强调知识的过程性，利用背景的生动性、具体性来帮助学生记忆。在此基础上，还要为学生提供在不同背景上进行多次重复的机会，以把记忆逐渐概括成为语义记忆。另外，应该指出的是，当前数学教学中，比较普遍地存在着两种记忆都不充分、不清晰的状况，它们之间的相互联系和相互作用更是没有很好地得到利用。这主要表现在基础知识教学时只教结果而不向学生展示知识的形成过程，不给学生提供背景材料，这样就使学生的记忆从开始时就失去了情景依托，记忆变成为对文字的死记硬背；在知识应用的过程中，或者只给学生提供单一的、复制性的背景，让学生进行机械重复性的记忆，或者只给学生以各种各样的练习，而不及时概括到语义记忆，从而减弱了推理能力。

2. 表象系统与言语系统

心理学家佩维奥（Paivio，1975）从信息编码的角度将长时记忆分为两个系统：表象系统和言语系统。表象系统以表象代码来储存关于具体的客体和事件的信息；言语系统以语义代码来储存言语信息。这两个系统既相互独立又彼此联系。这种观点称为双重编码说。这里，表象代码是记忆中关于事物的形象，有着与实际知觉相类似的性质，并且与外部客体相类似；而语义代码是一种抽象的意义表征，具有命题的形式，所以它又称为命题表征。

佩维奥在研究中发现，学习具体性文字中的信息比学习抽象性文字中的信息要容易得多，他认为这是由于具体的名词能产生心理映像。例如，学习“三角形”这个概念就比学习“函数”这

个概念要容易得多，按照佩维奥的观点，是因为“三角形”比“函数”更容易在学生头脑中形成视觉映像，既能形成言语记忆痕迹，又能形成视觉记忆痕迹。因此，文字的具体性（即文字唤起映像的品质），是学习言语材料的能力的一个决定因素。想象力（产生视觉映像的能力）和文字的具体性，在学生对言语信息的记忆中具有极大作用。

按照双重编码理论，造成数学知识学习和记忆困难的主要原因在于数学语言和符号的具体性比较差（即数学学习材料的高度抽象性），它不容易唤起视觉映像。因此，在数学教学中，教师应该重视帮助学生形成心理映像。例如，在代数教学中，应引导学生思考有关的几何意义，像一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解用二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象来表示；公式 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 的几何解释（如图 3.3.3）；“$\triangle ABC$ 中，已知 a，b 和 $\angle A$，解三角形”，其解的各种情况的几何解释（如图 3.3.4），等等。

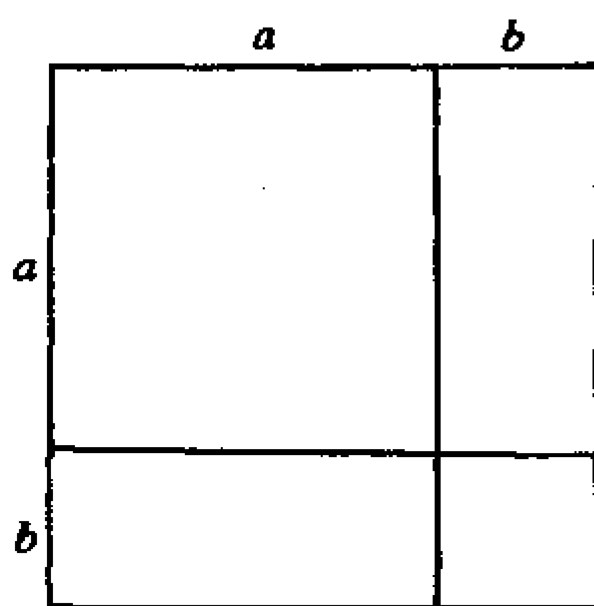


图 3.3.3

从双重编码理论的有关研究中我们可以获得重要启示：数学教学中，数形结合能力的培养，不仅涉及数学知识的应用（与问题解决能力相关），而且也涉及数学知识的记忆。教师强调数形结合，实质是为学生提供视觉映像，是利用数学学习材料是数与形的统

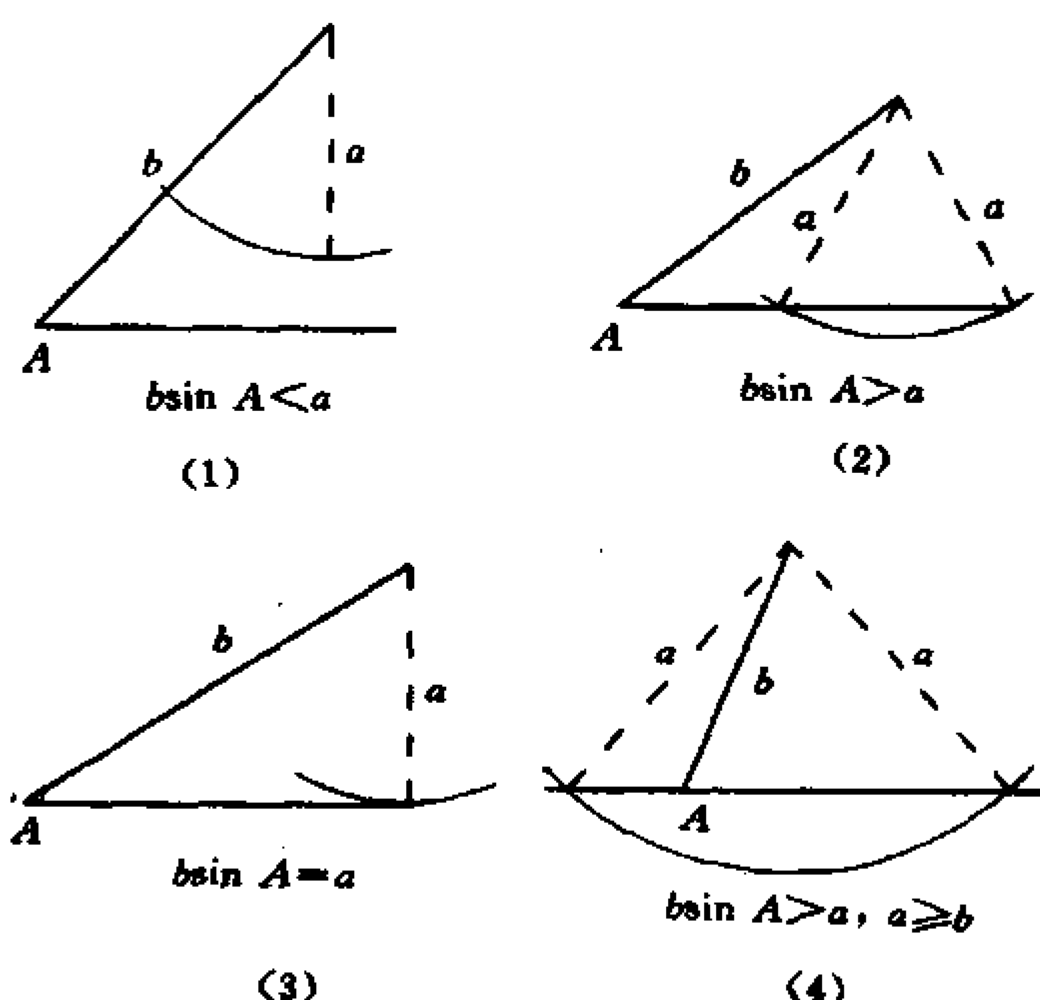


图 3.3.4

一这个特点，使抽象的数学知识形象化，从而使数学知识所具有的双重表象的作用得到发挥，学生在记忆它时就既可以形成言语记忆痕迹，又可以形成视觉记忆痕迹。

3. 语义网络模式

心理学家认为，上面谈到的语义代码在长时记忆中占据特别重要的地位。尽管映像在记忆信息加工中具有重要作用，但是，许多心理学家认为，信息的最终表征形式是言语，映像是根据言语代码重建的。语义网络模型是以交节点来描绘概念与从属概念的层次结构关系的，主要有以下几个模型。

（1）层次网络模型

该模型中，语义记忆的基本单元是概念，有关概念按逻辑的上下级关系组织起来，构成一个有层次的网络系统（如图 3.3.5）。图中圆点为结点，代表一个概念，带箭头的连线表示概念之间的

从属关系。连线在这个网络中实际上是具有一定意义的联想。

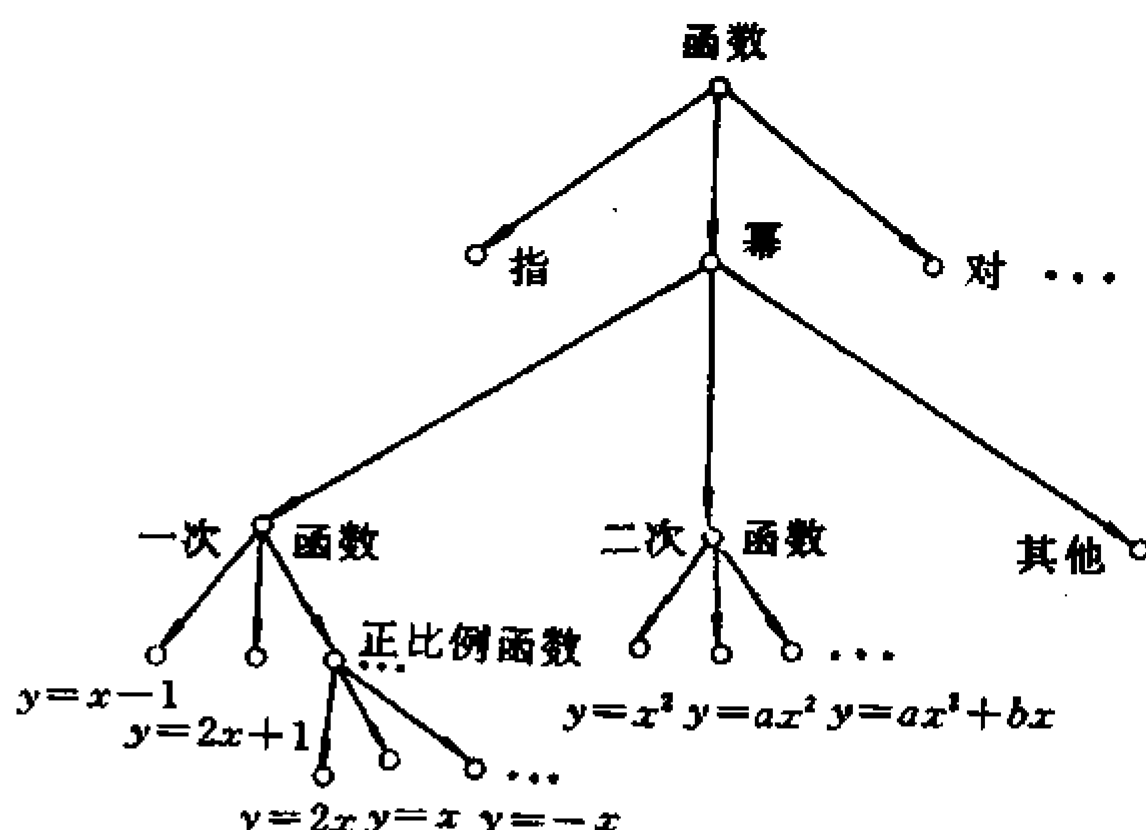


图 3.3.5

这个模型对概念的特征实行分级储存，在每一级概念的水平上，只储存该级概念独有的特征，而同一级的各概念所具有的共同特征则储存于上一级概念的水平上。一个概念的意义或者内涵要由它与其他概念和特征的关系来决定，或者说由某种连线的模式来决定。当要判断“A 是 B”这个句子的真伪时，通过沿连线从 A 结点到 B 结点的搜索，发现在语义记忆中的 A 与 B 的关系与句子中的 A 与 B 的关系是否匹配，匹配时作出肯定回答，否则作出否定回答。显然，搜索是这个语义记忆模型的加工过程，而且实际上它也是一种推理过程。

（2）命题网络模型

该模型也叫 HAM（Human Associative Memory）模型，意为“人的联想记忆”模型。它是由美国心理学家安德森（Anderson J R）于 1973 年提出的。

安德森认为，知识的最小单元是命题，而不是单个概念本身。

命题所表征的是一个事件的意义，是一种抽象表征，对具体细节并不表征。人的思想是由命题表征和记录下来的，人思考的对象是命题而不是语词。命题是思想和观念的单元。

按照这个模型，一个命题是由若干具有内在联系的概念所构成的，两个具有共同成分的命题又通过这种共同成分联系在一起，从而形成命题网络。举例来说，“不在同一直线上的三条线段首尾顺次相接所组成的图形叫三角形”和“三角形的内角和为180°”这两个句子中，前一个句子包含两个命题，后一个句子是一个命题。它们可如图3.3.6分别表示：

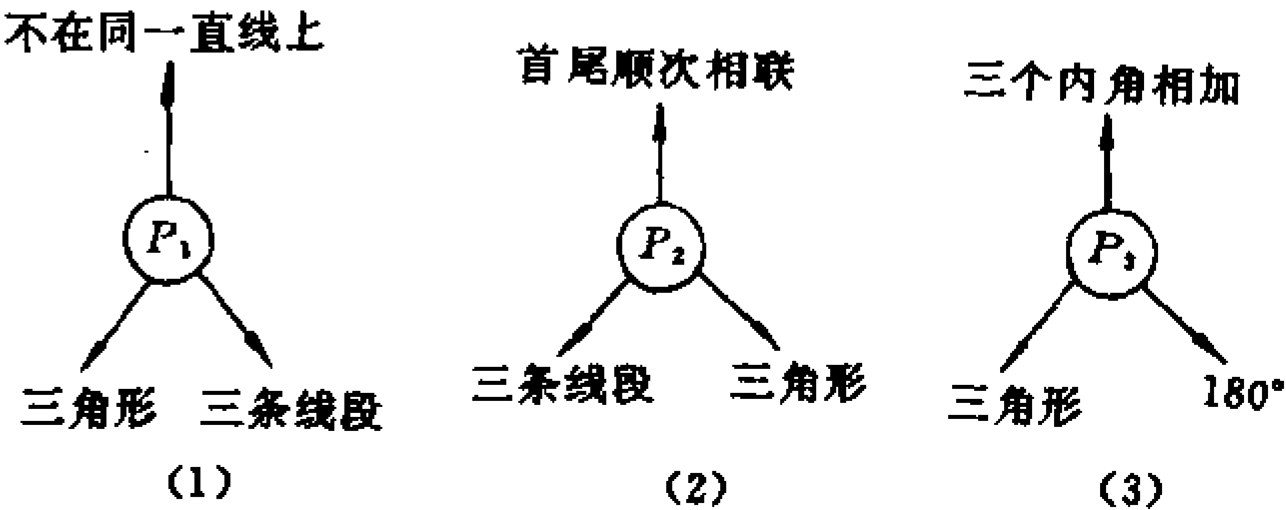


图 3.3.6

上述三个命题，分别通过共同成分“三条线段”和“三角形”而联系起来，形成一个简单的命题网络（如图3.3.7所示）。

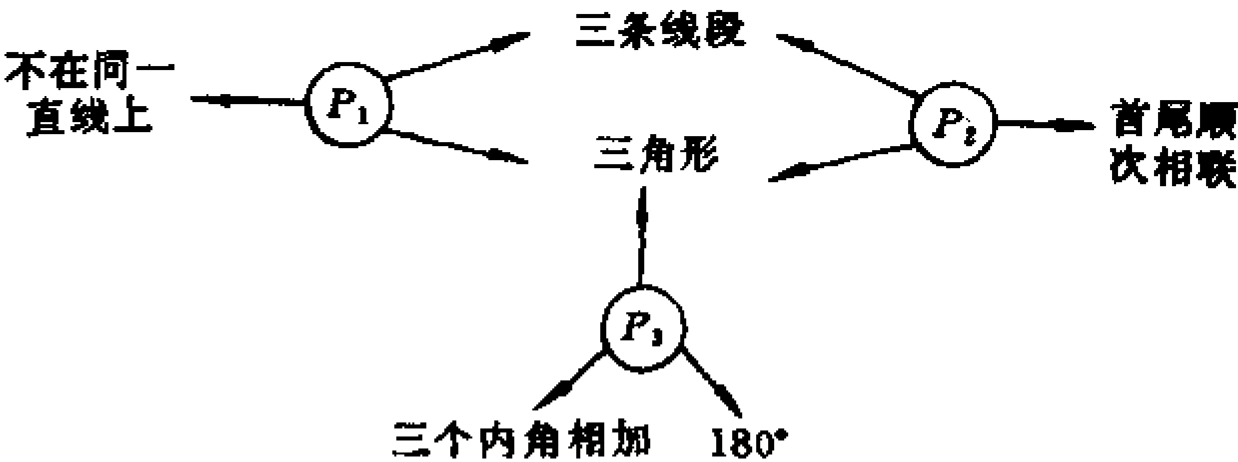


图 3.3.7

(3) 产生式系统

西蒙（Simon H A）和纽厄尔（Newell A）首先使用了“产生式系统”这个概念来表示人的认知技能。他们认为，人之所以能够进行计算、推理和解决问题，是因为他经过学习，在头脑中储存了一系列以“如果/那么”的形式表征的规则。这种规则就被称为“产生式”。每一个产生式有一个条件和一个动作，条件包含由“如果”开头的一套短句，动作包含由“那么”开头的一套短句。例如，判断一个四边形是平行四边形的产生式是：

如果　一个图形是平面图形，
　　　且它有四条边，
　　　且它是封闭的，
　　　且它是凸图形，
　　　且它的两组对边分别平行，
那么　这个图形是平行四边形。

显然，学生学习数学知识，本质上是在学习一套套的产生式规则。而且，一旦学生掌握了这种产生式，他就可以将它用来完成别的动作。因此，产生式具有概括性的特点，具有普遍意义。

每一个产生式只能完成一个动作，而有些任务需要有一连串的动作，因此就需要有一连串的产生式，它们就组成了复杂的产生式系统。这种产生式系统被认为是复杂技能的心理机制。下面我们通过一个实例（如表 3.3.1 所示）来说明若干个产生式系统是如何形成一个产生式系统的。

表 3.3.1 证明“两直线平行，内错角相等”的一套产生式

P_1	如果	目的是要证明内错角相等， 且现有两条平行线被第三条直线所截， 且现有一对同位角∠1，∠2，一对内错角∠2，∠3（如表 3.3.1 图 1），
	那么	建立子目标：由∠1=∠2（公理），推出∠2=∠3。
P_2	如果	子目标是由∠1=∠2（公理），推出∠2=∠3， 且现已有∠1=∠2，
	那么	再建立子目标：由∠1=∠3，推出∠2=∠3。
P_3	如果	子目标是由∠1=∠3，推出∠2=∠3， 且现已有∠1=∠3（对顶角相等），
	那么	此问题已经解决：由∠1=∠2，∠1=∠3，得∠2=∠3。

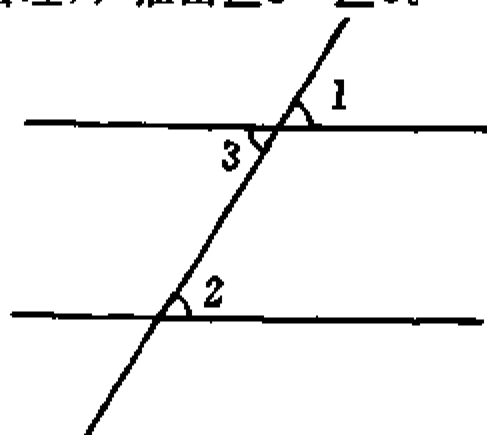


图 1

从表中我们可以看出，由产生式 P_1，P_2，P_3 所组成的系统，P_1 的活动结果成为 P_2 的条件之一，P_2 的活动结果成为 P_3 的条件之一。

上面我们分别讨论了长时记忆中信息的不同表征方式。从中我们可以看出，不同的信息有不同的储存方式，或者说不同类型的信息对表征系统的要求也不相同。因此我们可以认为，心理学家提出的每一种长时记忆模式都有它的合理性，只是他们所研究的对象（信息类型）有所不同罢了。当然，每一种模式又有其不足的一面，有其不能包容的对象。

另外，从上面的叙述中我们也可以看出，上述长时记忆模式中，并未包含对既有陈述性知识又有程序性知识的大知识单元的表征和记忆问题。有的心理学家认为，人们是用“图式”来表征

和记忆这种大知识单元的。图式中不仅含有命题的或概念的网络结构，而且含有解决问题的方法和步骤，也即既有陈述性知识，又有程序性知识。在信息加工过程中，图式必须与外部输入信息相对照，并选出具有最佳匹配的图式，用以理解输入信息的意义。心理学家认为，图式具有以下几个特点①：

第一，图式既有固定部分，又有可变部分。这种可变部分使得图式具有灵活性，在输入信息不太明确的情况下，图式也有能力对它的意义作出推测。

第二，图式具有层次性，它不但表现于图式之间的相互包含，而且还表现于图式的不同抽象水平。例如，从数学观念、数学思想方法到具体的数学知识，都有相应的图式表征。图式是围绕某个主题组织的。

第三，图式可以包含多种信息。用图式表征概念，既可包含语义记忆，也可包含情景记忆。因此，图式对概念的说明是百科全书式的。

第四，图式不仅是储存信息的静止的数据结构，而且也是一种动态的过程。它是一种评价自身与输入信息的匹配程度的过程，是一种为变量赋值的过程，是与其余图式相互传递信息以便作出比较评估的过程。

从以上的论述我们可以看出，图式不仅是一个信息库，而且它在信息加工过程中也发挥着能动作用：它是理解新信息的一个基本框架，新信息只有适合于它时才能被领会；它是指导注意和有目的搜寻环境刺激的指南；它能够填补从环境中接收的信息中的空隙。人的记忆系统是一个信息的积极的组织者和加工者。

(五) 信息的提取

学生在学习新知识、解决新问题时；需要使用长时记忆中已

---

① 高觉敷，主编．西方心理学的新发展．北京：人民教育出版社，1987，12.88

经习得的知识，信息加工理论将这一过程称为信息的提取。学生通过回忆将长时记忆中的有关信息提取出来，使这些信息回到短时记忆（工作记忆）中，然后再使它们与短时记忆中的其他刺激（新的环境刺激）进行相互作用，经过新的信息加工编码而习得新知识，解决新问题。由此我们可以看出，长时记忆中的信息的提取与储存，实际上是一个问题的两个方面。因此，在下面的论述中，我们总是把信息的有效提取与增强记忆联系起来。

信息加工理论认为，信息提取过程是一个能动的“重建”过程，需要把记忆的内容重新改造，而不是简单的复述。当我们需要运用长时记忆中的有关知识时，必须首先激活它们。激活有关的知识需要花费时间，而且时间的长短与学生对相应知识的熟悉程度有关，即知识越熟悉，所需激活时间越短。另外，这种激活作用具有延展性，即当某个概念被激活时，与之相联结的概念也会变成活跃状态。例如，当“平行四边形”这一概念被激活时，关于它的一些性质，如对角相等、对边相等、对角线互相平分等，也都会变成活跃状态。由此我们可以设想，由于有了激活作用的延展性，学生在回忆长时记忆中的有关知识时，按照他对相关知识的熟悉程度以及知识之间联系的紧密程度，可以形成一个被激活知识的“回忆链”。因此，从教学的角度来说，当教师要求学生回忆某项知识时，一方面应当给学生留有充分的时间，另一方面，应当给学生提供某种回忆线索，特别是对那些学过的时间比较长、与当前情景距离较远的知识的回忆，更应该给学生提供“回忆链”的“中间站”。

信息加工理论认为，信息的提取，在很大程度上取决于信息储存的形式，以及该信息与长时记忆中其他相关内容的关系。从上面关于激活作用延展性的论述就可以看出，处于良好组织结构中的、具有紧密联系的知识的提取比只有松散结构的、随机联系的知识的提取要容易得多。当信息的可辨别性差的时候，信息的

提取也会发生困难，这主要是由于信息的相似性对概念激活的延展性产生干扰，从而影响了提取所需信息的速度和准确性。另外，信息储存的形式对提取的影响也非常大。例如，在学习了某一单元的数学知识以后，教师与他的学生在一定的时间限度内，同时看一道需要综合应用该单元知识才能解答的数学题，然后再回忆。可以发现，他们回忆的能力相差很大。造成这种差别的原因，一是由于长时记忆中储存的信息"组块"大小不同，或者说，由于教师对相应单元中的数学知识有深刻加工，知识的结构性好、纵横联系强，因而使教师的信息"组块"中含有较大量的信息；二是由于对新信息的编码方式不同，学生比较多的使用维持性复述，而教师则主要采取精致性复述，他能从整体上对信息进行编码，并能将其中的主要信息转换成为自己熟知的方式。从而，学生的回忆主要依靠对解答步骤的逐一记忆，而教师在回忆时只需回想解答的关键步骤，并据此推出全部细节（当然，这种细节可能会有出入，但意义不变）。

研究表明，信息的提取，与信息在长时记忆中的记忆痕迹强度有关。而记忆痕迹的强度又与相应信息所受到的加工深度有直接关系。信息加工理论认为，加工至少可以通过两种途径来改善记忆：第一，可为信息提取提供"多余的检索路线"，换言之，由于信息得到加工以后，使得该信息与其他相关信息之间建立起紧密的联系，将信息保持在一个结构网络中，这种网络为学生提供了可以互换的检索路线；第二，加工可以使学生推导出实际上已经忘记的内容。例如，数学学习中，三角函数的诱导公式非常多，记忆难度很大，如果学生对它们作过深入的加工，掌握了诱导公式的整体结构（或者说，诱导公式成了"加过工的结构"），那么，学生就可以依据这一"加过工的结构"，把已经忘记的某个公式推导出来。

在对信息进行深度加工时，可以有如下途径：

第一，要对所学材料的意义进行充分的加工，通俗地说，就是要深刻理解知识的意义。这种深入加工是学生对相应知识的意义以及它与相关知识之间的联系性的一种细致推敲，是对知识之间相互联系性的多方向、多途径的思考。这种心理上的额外努力和深入加工，会使知识之间建立真正的实质性联系。

第二，要使抽象知识具体化，即通过深入加工，使得抽象的事物获得具体内容的支持，使概括的原理建立在丰富的背景之上。通过精细的加工，使那些“不可捉摸的东西”、“抽象的知识项目”在学生的心目中变成可捉摸而有意义的东西。另外，还应该使新学习的知识纳入到已有的认知结构中去，因为“任何一项知识，如果你把它和自己已知的东西联系起来，你就能记住它”。

以上两条，实际上与我们平常所说的“具体到抽象，再从抽象到具体”这一掌握知识的过程是一致的。

第三，通过深入加工，把信息按照层次结构组织起来，就像计算机的“目录树”一样。这样做，可以使学生在提取信息时迅速地安排记忆中的检索顺序，从而有效地提取信息。总之，在信息的回忆中，用层次结构方式储存的信息比那些随机储存那些有显著的方便性。

第四，要从整体上来把握信息。从知识学习的角度来说，就是既要记忆知识的结果，也要记忆知识的形成过程。信息加工理论对“编码效应”的研究结果表明，情景可以对记忆产生很大影响：学生在与学习情景相同的场合里，可以清楚地表现出较好的学习成绩。心理学家认为，这是因为情景要素与记忆发生了联想，于是当学生再次遇到这些情景要素时，记忆就受到了促进。

显然，记忆对于这种特殊情景的依赖性，虽然能够增强记忆，但是对知识的灵活运用又极其不利。为此，应当使学生尽可能在不同情景中学习。

以上我们介绍了一些与信息提取有关的问题以及如何增强记

忆，从而促进信息的有效提取的策略。心理学认为，如果学生对某项信息的记忆痕迹的强度很大，那么该信息的提取常常是自动的。教师当然希望他的学生对学过的知识留下强大的记忆痕迹，对任何知识的提取都能够“信手拈来”。但是，这只能是一种理想状态，换句话说，遗忘总是要发生的，“遗忘是为了更好地记忆”，或者说，记忆是在同遗忘的斗争中得到加强的，为此，心理学家对遗忘的性质也进行了研究。前已述及，信息加工的“激活理论”认为，信息必须先被激活，然后才能被提取，而且激活具有延展性。事实上，这种延展是通过联想而实现的，并与学生对相关信息的熟悉程度关系极大。换句话说，如果学生对某项知识的记忆比较弱（不熟悉），那么就会因为联想强度不足而失去该知识的激活能量，导致回忆失败，从而产生遗忘。

信息不能成功提取的第二种情况是，我们能够再认某些不能回忆的信息。例如，教师会经常碰到这样的情况：面对某个问题，学生就是找不到思路，就是想不起应该用哪个定理或公式。但是看了解答，他又恍然大悟，“原来是这样，我应该会的呀！”这种现象说明，某些信息在回忆时不能被激活，但它们仍然在记忆中保持着。信息加工理论对此有一个假设：遗忘不是信息从记忆中丧失，而只是丧失了联系信息的通道。而造成这种状况的原因，主要是因为在学习时对信息的加工深度不够。因此，教师必须要求学生独立完成作业，遇到困难时，不能轻易地去问同学或者马上去看答案。万不得已时，也应该要求学生在看（听）懂解答后，自己再独立地去完成类似的作业。从信息加工的观点来看，这样做的目的是为了促使学生对知识进行更深更细的加工，强化联系信息的通道。

信息不能成功提取的第三种情况是，“欲言难吐”。例如，在完成某项作业时，学生确实是知道需要用到的知识，而且对它并不陌生，但一时就是讲不出来。过后，只要有某种提示（哪怕是

非常微弱的暗示)，有时甚至是自发的，突然就想到了该用的知识。这同样说明了，提取不出的信息并不是它真的从记忆中丧失了，而是因为提取信息的通道被暂时堵塞了。

从以上关于信息提取失败的论述中不难发现，在提取信息时，提取线索起了非常重要的作用。心理学的实验已经证实，提取线索越接近于记忆痕迹，提取就越有效。因此，教师在教学中，应对学生提取所需旧知识的困难有所估计，并要为他们提供适当的回忆线索，以引起学生对有关知识的联想。当然，最重要的是要时刻提醒学生，"建立自己的联想"。

就数学学习的情况来说，学生不能应用学过的数学知识（即信息提取失败）的原因我们可以作如下分析：由于数学思想方法在数学结论形成的过程中起着关键作用，它指引着数学学习活动（即数学学习中的信息加工）的进程，相当于信息加工理论中所说的"信息提取线索"，而数学知识形成的过程就是"信息通道"，因此，从信息加工观点来看，学生不能有效地将数学知识用于解决问题的主要原因还是没有掌握数学思想方法，没有理解数学知识的形成过程。所以，从信息加工理论出发我们也可以获得如下结论：一定要把数学教学作为"过程"来进行，把数学思想方法的教学放在首位。只要很好地掌握了数学思想方法，理解了数学知识的形成过程，数学结论的掌握可以"水到渠成"。只有这样，才能使学生在应用数学知识时找到有效的信息提取线索，形成最佳的信息提取通道，成功地提取需要的数学知识。实际上，当前我国数学教学质量不能得到根本改观，总是处于高投入低产出的状况，其主要原因之一就是：通过强化手段让学生记忆"结果"（信息），没有让学生理解形成"结果"的"过程"，没有使学生掌握数学思想方法，形成数学观念。结果是学生头脑中形成的数学知识网络结构功能差，没有数学知识之间的联系通道，导致信息通道不畅，应用时不能成功提取。表现在教学上，其基本做法是：从

概念的出现、定理和公式的获得，甚至是一个例题的具体解法，为了赶进度（目的是为了挤出更多的时间，为高考进行强化训练），都作为“结果”直接“抛”给学生。

以上我们介绍了信息加工理论关于信息加工过程的一些基本观点。应该说，把信息加工过程分成注意、编码、储存和提取这样几个阶段，是符合人类认识事物的一般过程的。但是，从目前已有的大量研究结果来看，信息加工所涉及的几个阶段之间存在某种程度的重叠。事实也是如此，一个人在认识事物的过程中，信息的编码、储存和提取信息是不可能各自独立地进行的。另外，信息加工不是一次性的，也就是说，在完成上述几个活动以后，人要通过自己的反应发生器组织起一种有序的动作，并激活反应器，对环境作出可观察的动作反应。然后，人又通过观察自己动作的效果，获得一种反馈信息。一般来说，通过反馈，人将对自己的信息加工过程作出调整（实际上这是一次新的信息加工过程），以便自己对环境作出更加正确的反应。

三　控制的过程

前面对信息加工过程的描述，使我们对学习的内部活动有了一个比较完整的认识。然而，学习活动是复杂的，不难想象，在学习活动的每一个环节上，不同学生会有不同的特点，他们在学习方法、所采取的学习步骤等上都会表现出灵活性、差异性。那么，到底是什么因素导致了这种差异呢？信息加工理论认为，我们可以从执行控制过程和期望中找到答案。加涅认为，这两个过程也是习得的，它们决定了学生在信息加工过程中所采取的方法的性质。控制过程决定了学生是怎样注意、编码、储存和提取信息的：感觉登记处内容的哪些特点进入短时记忆，从而影响选择性知觉；应当对短时记忆中的哪些内容进行精致性复述；应当怎样将信息储存在长时记忆中以及采取什么方法和路线来搜寻和检

索信息等，而且，控制过程还将决定学生概括和解决问题的方法，因此它也影响着学生的思维品质。

期望代表了学生对学习目标的一种期待心情，它是引起学习动机、维持学习兴趣的动力。事实上，学生想要达到的学习目标会对学生的整个信息加工活动产生非常重要的影响，可以说，学生在整个信息加工过程中所从事的一切内部加工活动，都是对他心目中的那个目标作出的反应。心理学家认为[①]，强化的反馈效果之所以能够影响学习与记忆，并不是它们使学生获得了"报偿"，而是因为它们给学生传递了一种信息：告诉学生是否达到了目标或他离目标的距离还有多远。换言之，反馈之所以有效，是因为它肯定了学生的期望，而这就是强化的意义。

事实上，就目前信息加工心理学的研究来说，控制的过程已经成为一个研究的热点。像"认知策略"、"自我意识"、"自我反馈"、"反省"、"元认知"等，实际上都是在研究主体对自己的信息加工过程的意识问题，其意义一般都是指在完成任务过程中的计划、监控和决策，与"控制的过程"的意义应该是一致的，只不过是名词不同罢了。另外，当前信息加工心理学的研究，实际上是围绕人的信息加工过程这个中心来展开的，是对信息加工过程所涉及的各种因素、各个方面的深入细致的研究。我们相信，这些研究对于揭示数学学习的内部过程及其心理机制会有极大的指导意义。

---

① [美] 加涅 R M. 学习的条件. 北京：人民教育出版社，1985，12. 68

第四章 数学技能的训练与掌握

第一节 数学技能及其作用

在数学学习过程中，数学技能的形成是非常重要的。数学技能以数学知识的学习为前提，在数学知识学习和应用过程中，通过实际操作获得动觉经验而逐渐形成，并且对知识学习产生反作用，数学技能的形成可以看成是深刻掌握数学知识的一个标志；数学技能与数学知识共同构成数学能力的基本要素，是形成数学能力的前提，因为按照能力的“泛化经验说”，作为个体心理特性的能力，是对活动的进行起稳定调节作用的个体经验，是一种类化了的经验，而经验的来源有两个方面，一是知识习得过程中获得的认知经验，二是技能形成过程中获得的动作（包括外化的操作性动作和内潜的心智动作）经验，而且，作为一种稳定的心理结构——能力要对活动进行有效的、经常的调节和控制，必须要以知识和技能的高水平掌握为前提，理想状态是技能的自动化。能力心理结构的形成依赖于已经掌握的知识和技能的进一步概括化和系统化，事实上，它是在实践的基础上，通过已掌握的知识、技能的广泛迁移，在迁移的过程中，通过同化和顺应把已有的知识、技能整合为结构功能完善的心理结构而实现的。当然，数学能力对数学技能也有反作用。因此，数学技能的地位是极其重要的。但是，在过去，数学技能的研究并没有引起数学教育工作者的重视，比较多的是对数学知识与数学能力关系的研究，中间越过了数学技能。

一 心智技能及其特点

前已指出，数学技能主要是一种心智技能。为了认识数学技能，我们有必要先了解一下心智技能。

在心理学的历史上，由于行为主义长期占据统治地位，他们否认意识，否认心智活动的存在，因此关于心智技能的研究一直没有得到重视。20世纪60年代，认知心理学逐渐占据心理学的主导地位，心智活动和心智技能才受到应有的重视，展开了大量研究。例如，美国心理学家加涅（Gagne R M，1916～）就对智慧技能即心智技能进行了专门的论述。

他认为，智慧技能是“个体运用符号与环境相互作用的能力”。加涅在《教学方法的心理学基础》一文中说，“智慧技能的学习从获得简单的辨别和连锁开始。学校的学习虽然时常包括这些简单的形式，但主要是学习概念和规则，概念和规则使得学生能够用体现他的环境的那些符号来做事。”[①]这就是说，智慧技能包括：辨别、概念、规则以及问题解决（高级规则）等。如图4.1.1所示，智慧技能之间有一种相互依赖关系，从中我们可以看到，任何一种智慧技能的学习都是以过去学习的其他比较简单的技能为前提的，加涅认为这是智慧技能的一个重要特征，另外，不同类型的智慧技能所要求的学习条件存在着显著的差别。皮亚杰非常重视操作和运算在知识形成中的作用，这里的“运算”就是指内化的、可逆的动作，实际上就是有较大概括性的心智动作。他重视心智动作的发生与发展，强调心智动作的结构性和组织性。美国心理学家安德森在他的《认知心理学》中，把认知技能定义为程序性知识，认为动作技能、智慧技能以及作为认知策略的自我调控技能，都是不同形式的程序性知识。程序性知识先以命题网络的形

① 吴棠，译.教育心理学参考资料选辑.济南：山东教育出版社，1982，132

式表征（陈述性知识），经过在不同背景下的练习，再转化为以产生式的方式表征的知识（程序性知识）。一系列小的操作步骤整合为大的步骤，从而形成产生式系统（某些次要的中间步骤被省略了），这就是所有熟练的技能达到自动化的心理机制。这里必须指出的是，安德森没有明确指出动作经验在心智活动中的作用，因而把技能完全等同于知识，这是不正确的。事实上，掌握知识是形成技能的必要前提，而在各种情景中进行练习，达到在变化的情景中也能熟练应用知识，形成熟练应用知识的经验，则是形成技能的必要手段。

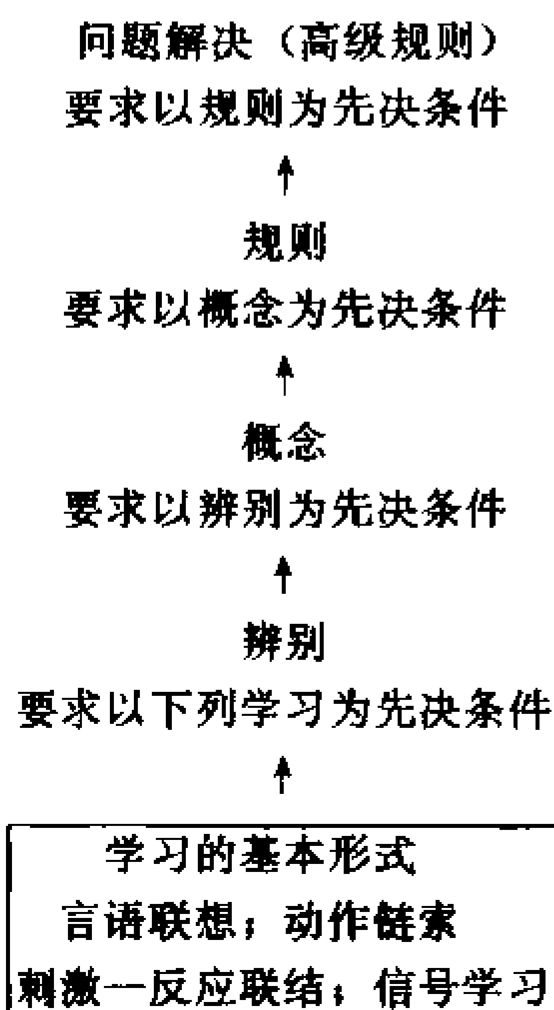


图4.1.1　智慧技能的层次：由简单到复杂（自下而上）

我们认为，心智技能（即智力技能）“是一种调节、控制心智活动的经验，是通过学习而形成的合乎法则的心智活动方式”，它

有如下特点[1]：

1.心智技能是一种活动方式，属于心理活动经验，它与知识（陈述性知识、程序性知识）既有联系又有区别。首先，两者存在相互作用，在心智技能习得阶段的初期，是以陈述性知识出现的，然后再转化为程序性知识，并且心智技能的习得与知识的学习是相互促进的。例如，学习函数奇偶性知识与形成判断函数奇偶性的心智活动方式，都是从学习奇偶性定义开始的："设函数 $f(x)$ 的定义域为 I，如果对于定义域 I 内的任意一个自变量 x，都有 $f(-x)=f(x)$，那么就说 $f(x)$ 是偶函数；如果对于定义域 I 内的任意一个自变量的值 x，都有 $f(-x)=-f(x)$，那么就说 $f(x)$ 是奇函数"，这里，定义是陈述性知识，因此定义学习是一种知识学习；另一方面，定义又包含了判断函数奇偶性的操作程序：

(1) 判断函数 $f(x)$ 的定义域是不是关于原点对称，即对于定义域内任一 x，$-x$ 是否也在定义域内（这里隐含于定义中的）；

(2)如果不是，则函数 $f(x)$ 为非奇非偶，操作结束。如果是，则继续；

(3) 计算 $f(-x)$ 的值；

(4) 判断 $f(-x)=f(x)$，$f(-x)=-f(x)$，$f(-x)\neq\pm f(x)$ 哪一个成立；

(5) 根据 (4)，指出函数奇偶性。

因此，定义学习又是一个形成心智技能的过程。其次，在应用阶段，两者也存在相互作用：陈述性知识为进行某项操作提供依据，而心智技能的形成（即通过实际操作而获得动作经验，并熟练掌握操作手段）过程又促进了知识的深刻理解。例如在上述例子中，学生应用定义解决有关函数奇偶性问题的过程既是心智技能形成的

① 冯忠良，著. 结构化与定向化教学心理学原理. 北京：北京师范大学出版社，1998，4. 287

过程，又是深刻理解和熟练应用定义的过程。所以，在教学过程中，应当注意知识与技能之间的这种互惠关系。

当然，心智技能与知识是不能等同的。知识的学习所解决的是“是什么”和“为什么”（陈述性知识）、“做什么”和“怎么做”（操作性知识）的问题，知与不知的问题；心智技能学习所解决的是完成活动时会不会及熟练不熟练的问题。

2. 心智技能是一种心智活动方式，区别于操作活动方式。就心智活动来说，它有以下三方面的特点：

(1) 动作对象的观念性。操作活动的对象是物质的，具有客观性；心智活动的对象是客体在人脑中的主观映像，是客观事物的主观表征，是知识、信息，心智活动就是对客观事物的主观表征的加工改造过程。而客观事物的主观表征是具有主观性的，属于观念的范畴，因此，心智活动可以看成是对观念的加工改造活动，具有观念性；操作活动是对物质的加工改造活动，具有物质性。

(2)动作执行的内潜性。操作活动可以以外显的形式通过肢体运动来实现，言语活动则可以通过声音而觉察活动的存在。心智动作的实现则是通过内部言语进行的，只能通过其作用对象的变化而判断活动的存在，因此，心智动作的执行是在头脑内部进行的，具有内潜性。

(3) 动作结构的简缩性。由于内部言语可以是不完全的、片断的，因此心智动作可以合并、省略或简化，这样，心智动作就具有简缩性。

所以，我们可以把心智活动定义为：在人脑内部，借助于内部言语，以简缩的形式对事物的主观表征进行加工、改造的过程。

3. 心智技能是合乎法则的心智活动方式。这里，“合乎法则”是指活动的动作构成要素及顺序应体现活动本身的客观要求，“合乎法则”就是要实事求是，按照客观规律办事。实际上，任何事物都有其自身的发生发展规律，人们的活动只有符合这种规律，才能

对事物进行有效的加工改造，才能实现对活动本身的调节控制。

4. 心智技能是习得的。心智技能不是生来就有的，而是在学习过程中，在主客体的相互作用基础上，主体通过动作经验的内化而形成的。

二　数学技能研究的反思

综观国内外的数学技能研究，我们可以发现其中观点的差异非常大。国外虽然也明确地提数学基本技能这一概念，但是对数学技能的界定非常模糊，常常与数学知识、数学能力混同一起。国内有明确的数学技能定义，但一般都是借用普通心理学的术语所进行的描述。因此我们应该从已有的研究出发，重新审视数学技能。

（一）国外

1. 日本数学教学大纲中关于数学技能的表述

在日本的数学教学大纲中，对各年级都有关于数学技能的要求。例如对初中一年级，在数与式方面，要求“掌握运用字母符号表示数的关系和性质的初步能力，获得简单表达式的变换技能”；在图形方面，要求“掌握由已知条件逐步完成作图的技能，并加深对平面图形的理解”。对初中二年级，在数与式方面，要求“发展从事物现象中找出数量关系并用公式表示出来加以灵活运用的技能”，“理解不等式的意义，获得解一元一次不等式的技能”，“理解一次方程组及其解的意义，并能加以运用”；在图形方面，要求“掌握寻求平面图形性质的技能”，“能够运用三角形的全等与相似的判定研究图形的性质”；在数量关系方面，要求“按照目的收集资料，整理成表，画出统计图等，能够从代表值、资料的分布情况观察出资料的倾向”。初中三年级，在数与式方面，要求“进一步按照目的要求加深理解代数式的变形和二次方程，同时提高运用的技能”；在图形方面　要求“提高应用直角三角形和圆的性质研究图形性质和进行计算的技能，同时提高对图形性质的预

测和逻辑推理能力”；在数量关系方面，要求“进一步提高表示和应用函数关系的技能，研究函数的特征，加深对函数的理解”。

从上述表述中可以看出，技能与知识紧密结合，主要体现了“能算、会画、会推理”方面的要求。

2. 英国国家课程中的技能理论

在著名的“科克罗夫特报告”中，对各行各业所需要的数学知识和技能都作了详细的调查和分析，报告中提出的进行成功的数学教学所必须的要素之一是“以培养学生的基本技能及其应用为目的的训练”，强调必须使学生获得一定的口算、笔算以及近似与估算的技能，提倡心算、笔算和计算器的灵活应用。报告认为，同一年龄的学生在理解和形成技能水平上是存在很大差异的，但是对所有学生应该有共同的基本内容，这些内容包括：(1) 在不同的情景下读、写和谈论数学；(2) 用各种方式进行计算：心算、笔算和用计算机、计算器计算；(3) 将一定单位制下的度量与计算相结合，会将一种度量单位转换成另一种度量单位。显然，这些内容包含了对技能方面的要求。

在1991年5月颁布的英国国家课程中，提出了数学教学目标是发展学生的知识、技能和理解力，以满足21世纪国家对人才的要求，并具体规定了五项成绩目标：

目标1：运用和应用数学　会选择和利用学习大纲提出的知识、技能和理解力于解决实际任务、现实生活问题及在数学内部进行研究；有把握地运用涉及其他目标的学习大纲规定的适当教学内容。

目标2：数　学生应理解和运用数，包括估计与近似，解释结果并检验正确性。

目标3：代数　应认识并运用符号表示关系。

目标4：图形和空间　应认识和运用二维和三维图形的性质，并在空间的研究中运用度量、位置和变换。

目标5：数据处理 能收集、处理并解释数据，能理解、估计和运用概率。

在此基础上，1994年4月，英国学校课程和评价当局又提出修订国家课程的建议草案。其中提出11～16岁学生的数学学习中，应将知识和理解力应用于研究越来越复杂的情景，需要从一系列技能中选择合适的技能，包括应用适当的信息技术。在成绩目标的教学要求中提出：

（1）运用和应用数学

在将数学应用于解决实际问题方面，要求能够选择并组织为处理一系列问题所必须的数学和资料；将复杂问题分解为一系列任务；选择、尝试和评价各种可能的方法。在数学交流方面，要求能够运用适当的数学交流形式，如词、符号、图、表、图象及计算机打印输出；解释用各种形式表示的数学；运用图象、图表和符号，以清晰的方式介绍工作、传递意图；批判地检验，改进和论证他们选择的数学描述。在发展数学推理技能方面，要求能够解释并证实他们是如何得出结论或问题的解答的；详细说明简单的假设，设计检验的方法，以及收集和分析结果以观察它们是否有效；作一般化并予以检验，认识特例，理解数学解释与实验证据之间的区别；在代数和几何中理解和运用“如果……那么……”的推理格式，并从统计作出论断；遵循数学推理链认识矛盾。

（2）数与代数

针对各项具体知识，都提出了理解知识和掌握技能上的要求。例如，对理解和应用函数关系上，要求：研究从各种情景下提出的数的模式；在适当的场合使用计算机；求数列的一般规律，用符号表示简单函数并用图象或表格表示出来；解释描述现实生活情景的图象；研究标准的数学函数的性质，等；作出并解释这些函数的表格和图象，包括画出图象的草图，以及运用计算机作出图象以理解它们的变化情况；选择与一组数据相符合的数学函数，

以便建立特殊情景的模型并解决问题。

（3）图形、空间与度量

分“理解和应用图形及其变换的性质”和“理解和应用度量”两个方面提出具体要求。

（4）数据处理

对数据处理过程的各个阶段都提出了相应的要求。在建立探究情景阶段涉及确定课题，提出要实现的调查线索，要求回答的问题，并在较高水平建立要检验的假设；在收集数据阶段涉及如何设计和应用数据收集表，从计算机数据库接收所需的信息，在适当的场合对成群数据作频率表；如何设计调查表或实验以计算检验假设所需要的数据，考虑可能的倾向。在分析数据阶段，涉及解释和构造表示离散数据的图表，包括条形图、直线图、饼分图，频率多边形、散布图以及累积频数图；如何选取并计算或估计合适的中心趋向度量，即众数、中间数和算术平均数，先考虑少数的离散数据，再考虑成群的连续数据；如何选取并计算或估计适当的扩散度量，包括应用于离散数据、成群数据和连续数据的间距和四分位数间距。在解释数据阶段，涉及如何以图象的形状和单一分布的简单统计、数据组的比较分布以及两组数据间的关系为基础作出判断；批判地评价结果，发展对结果可靠性的理解；从对实验或调查的数据分析作出的推断可以提出进一步调查研究的问题。另外，对估计和计算事件的概率方面也提出了要求。

从上述表述中我们可以看到，英国对技能的理解也有与知识紧密结合的特点，而且就每一项具体知识，都提出了既有知识掌握上的要求，又有技能及能力上的具体要求。总的来说，对各项数学内容的各个学习阶段都具体提出了相应的技能方面的要求，这是很有特色的。

3. 美国现代课程标准中对数学技能的要求

在《学校数学课程与评估标准》（简称《课程标准》）中，美

国提出了数学课程的新目标：(1) 了解数学的价值；(2) 对自己的数学能力有信心；(3) 变成数学问题的解决者；(4) 学会数学交流；(5) 学习数学推理。这一目标要求对数学课程内容和教学进行改革。总的来说，对数学知识内容要求拓宽和加深，在教学方法上，强调学生的积极参与，主动获取知识，对知识的掌握上，强调灵活应用而反对死记硬背。具体来说，在概念掌握上，要求从观察调查生活实例开始，建立经验，然后再进行抽象，以利于学生形成清晰而牢固的概念，并且要给学生充足的时间，通过建立概念和技能的联系而发展理解力。在教学过程中，强调学生自己动手操作实物，边试验边学习数学，让他们自己积极构造、修改和合并概念。在思维发展上，要使学生对自己的数学能力有信心，能灵活运用数学概念处理工作，解决问题，选择适当的策略，作出合理的决定。能在不熟悉的集合中辨认出熟悉的数学结构，能探测模式，分析数据，等。根据具体内容，《课程标准》提出了相应的技能和能力要求。其中，特别重要的是提出了数学交流上要注重讨论、书写、阅读和倾听数学思想。

总的来说，美国的《课程标准》特别重视问题解决，数学教学以问题解决为重点，这就对学生的数学技能提出了更高的要求。例如要求学生把与各种问题情景相关的问题公式化；发展和运用各种问题解决策略，特别是那些多步骤的、非常规的问题；鉴别和说明与原始问题相关的结果，把结果和策略推广到新的问题情景中。

4. 新加坡数学课程目标中的技能成分

新加坡数学课程目标由五个成分组成：概念、技能、方法、态度和自我认识，它们都是以问题解决为核心的。数学技能包括：估计和近似、心算、交流、使用数学工具、代数运算、处理数据等。

5. 法国普通中学数学教学大纲中对技能的要求

法国的普通中学数学教学大纲中，不但有对教学目的和教学

内容的陈述，而且还有教学方法的陈述。例如，在一年级（相当于我国的高中二年级）A_1和B班的教学大纲中认为：

(1) 图象表示法　图象表示法占有重要的位置，因为除了其自身引起你的兴趣，它还能将大纲各部分所研究的数学对象直观化和具体化。图象的应用能培养细致精确的作风，并且突出理论和实践操作的结合；从更大意义上说，是培养学生用几何分析来处理应用问题的方法，因为几何图象能把直观的对象、抽象的语言及某些说明的过程都表示出来。

(2) 数值问题　因其在许多数学概念的理解中，在与数学相关的各领域中所起的重要作用，数值应用问题和数值方法的利用比较广泛。它还能训练学生将数学推理和检验结合起来，提高学生严谨、细致的素质。

(3) 算法问题　要重点突出所研究问题的图示法。可以通过几个简单例子明确其步骤：算式的建立，同一问题的不同处理所得结果的比较。

(4) 计算器的应用　使用计算器的目的不仅是进行运算，还用来检验计算结果，有助于研究工作，为以后的计算机使用打下基础。要让学生形成下列技能：能对数字进行算术四则运算，能进行数值的比较；能使用涉及到年级大纲上所规定的函数键并用以编制一些一个变量的函数值计算的程序；能编制序列指令程序，在毕业班A_1类，编制条件指令，迭代指令程序；建议掌握包含一个或两个变量的统计函数模式的编程能力。

(5) 计算机初步　与计算器的应用的要求差不多。

(6) 训练的一致性　通过大量的作业练习，大纲各部分，如几何、代数、指数、函数、序列等的研究内容能够融会贯通。从这一角度来说，应该把数学教学与其他学科的教学联系起来。在进行综合练习时应给学生以必要的提示，对学生在技能上的要求应在大纲上明确地表明。……

(7) 科学训练　实验、推理、抽象思维、批判分析等能力不是彼此对立的，应该同时进行培养。估计问题的准确性、把实际问题数学化、实验、运用理论、检验结果等都是同一数学活动中的不同步骤，训练的主要目的是培养学生的推理能力，数学语言表达能力。

(8) 推理、词汇和符号表示　应该使学生学会使用常见的符号和推理方式。

在教学内容的具体陈述中，对技能的培养作了具体的表述。

法国在数学教学大纲中对各数学内容的教学重点、该内容在技能和能力培养方面的作用及培养的侧重点等都作了说明，这是他们的一个特点。从上所述可以看出，在数学技能上，主要还是从计算、操作、推理、语言表述等方面来提，与别的国家有些不同的是在计算器（机）应用方面提出了比较详细的技能要求，包括操作和编程两个方面。

纵观各国数学教学大纲，它们对数学技能一般都没有给出明确的界定，基本上都是在教学目标中提出技能的总要求，并结合具体知识内容提出相应的技能方面的要求。至于技能与知识及能力之间的关系、技能的形成途径等，一般都没有涉及，至少是没有明确地作出表述。从数学技能的具体内容来说，各国所强调的也不尽相同，但是都包括了“能算、会画、会推理”。各国的大纲都在一定程度上反映了社会发展、科学技术发展对数学技能的新要求，例如强调计算器、计算机的操作和编程技能，数学交流技能，数学语言应用方面的技能，数据处理的技能等。但是从总体上来说，知识、技能、能力之间没有进行区分，这不但会对技能的训练和形成产生不利影响，而且对知识的掌握和能力的培养也会有消极影响。

(二) 国内

目前，我国数学教育界比较认同的数学技能观是“数学技能

是指通过练习而形成的、顺利完成数学活动的一种动作方式，往往表现为完成数学任务所需要的动作协调和自动化。”“在认识特定事物，解决具体课题中，心理活动按一定的合理的、完善的方式进行就是心智技能；掌握正确的思维方式、方法是心智技能的本质特征”，它是通过练习获得的。在我国1992年颁布的《九年义务教育全日制初级中学数学教学大纲》中，对数学技能具体明确化为：能够按照一定的程序与步骤进行运算、作图和画图、进行简单的推理。在新的供试验用的《全日制普通高级中学数学教学大纲》中，对高中数学基本技能具体化为：按照一定的程序与步骤进行运算、处理数据（包括使用计算机）、简单的推理、画图以及绘制图表等技能。

显然，我国关于数学技能的要求还是“能算、会画、会推理”。

我国有的数学教学实验对知识、技能和能力之间的关系以及发展的阶段性和延续性作了研究。例如，数学目标教学实验的结果认为：

运算技能、能力的发展阶段是：步步有据、运算准确→准确迅速运算→善于观察分析、筛选方法、灵活运算；

逻辑推理技能、逻辑思维能力的发展阶段是：言必有据、书写规范→步步有据、逻辑推理→运用分析、综合的思维方法进行逻辑推理→培养思维的灵活性、深刻性、敏捷性；

识图、画图技能、空间想象力发展阶段是：看懂基本图形→能画基本图形→由文字、符号或实物画出基本图形→从基本图形中识别基本元素及其关系→从综合图形中分解基本图形，进行逻辑分析。

从上述材料中我们可以看到，我国对数学技能的理解大致也是“能算、会作图、会推理”等三个方面，这不但不符合数学教育现代发展的要求（例如，计算机教育在数学教育中的地位已经

越来越重要了，然而上述三个方面的技能显然不能包括计算机学习方面的技能），而且由于过分强调技能是一种“活动方式”，因此对技能的理解上重视了“操作性”而把技能（特别是心智技能）的“智力性”放在了一个相对次要的地位，这样，对技能的训练也就停留在模仿层次，贬低了训练中理解的作用。所以，从数学技能的组成成分、数学技能的特点、数学技能的作用、数学技能的形成到数学技能的培养和训练，都必须进行重新认识。

三 对数学技能的认识

加涅曾经指出，学校里学习的数学内容都是智慧技能（即心智技能）。按照加涅的观点，数学心智技能的学习是从对数学对象的辨别开始的，因此，我们可以认为，凡是有数学活动存在的地方，都有数学技能的训练的问题，也有需要数学技能发挥作用的问题。在数学学习活动中，数学技能和数学知识在一种相互作用、相互促进的方式中被习得。数学技能是从数学知识掌握到数学能力形成和发展的中间环节，数学技能本质上是运用已经掌握的数学概念、定理、公式和法则等基础知识（即不掌握数学基础知识，数学技能就不可能形成）来理解并解决问题的心智动作经验，而数学能力则是这种经验的进一步概括化和系统化。我们强调理解在数学技能形成过程中的重要性。

（一）数学技能的组成因素分析

数学技能也可以分为动作技能和心智技能两种，但主要是心智技能。既然数学技能在任何数学活动中都会得到训练和培养，也会在数学活动中发挥作用，那么我们就可以通过考察数学活动过程来认识数学技能。

首先，运算、作图和推理是三种基本的数学活动，因此，“能算、会作图和会推理”是三种基本的数学技能。这里，运算技能是指能正确运用各种概念、公式、法则进行数学运算，作代数式的

变形，包括对算法的选择以及对所采用算法合理性的判断，还包括达到一定的运算速度。运算包含根据法则进行的精确计算、心算和估算。作图技能是指根据数学语言和题意，能准确、直观地作出几何图形，这里要注意的是，作图技能不仅是一种动作技能，对于数学中的作图来说，更重要的是在头脑中按一定的方式合理、完善地组织作图步骤，考虑图形中各元素（点、线和面）的位置、大小及其关系，显然，这些都属于心智技能的范畴。推理技能是指根据具体内容所规定的程序与步骤进行逻辑推理，因此，从技能培养的角度来说，数学知识的学习目标中，应该包含知识中所蕴涵的关于知识应用的程序与步骤，这一点我们在前面已有例子。另外，推理技能中还包含了正确、简捷地表述思想，其中，在推理过程中适当地使用数学符号来帮助推理则可以看成是突出地反映了数学特点的技能。如[①]：

已知椭圆的中心在原点 O，焦点在坐标轴上，直线 $y=x+1$ 与该椭圆相交于 P，Q 两点，且 $OP\perp OQ$，$|PQ|=\frac{\sqrt{10}}{2}$，求椭圆的方程。

解：可设椭圆 Γ 的方程为 $\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}=1$，题设中的直线为 l。

①由于 $P,Q\in l$，故可设 $P=(x_1,x_1+1)$，$Q=(x_2,x_2+1)$；

又 $OP\perp OQ$，即 $\frac{(x_1+1)}{x_1}\cdot\frac{(x_2+1)}{x_2}=-1$，即 $(x_1+x_2)+2x_1x_2+1=0$；

而 $|PQ|=\frac{\sqrt{10}}{2}$，即 $(x_1-x_2)^2+[(x_1+1)-(x_2+1)]^2=\frac{5}{2}$，即 $4(x_1-x_2)^2=5$；

命 $x_1+x_2=X$，$x_1x_2=Y$，则有 $X+2Y+1=0$，$4z^2-16Y-5=0$，解得

① 亦金.谈谈解题的表述方法.数学通报，1991年，12.33

$X=-\frac{1}{2}, Y=-\frac{1}{4}$ 或 $X=-\frac{3}{2}, Y=\frac{1}{4}$。

②由于 $P, Q\in\Gamma$，即 $Bx_i^2+A(x_i+1)^2-AB=0$，即 $(A+B)x_i^2+2Ax_i+A(1-B)=0(i=1,2)$；由韦达定理，并代入①，有 $\frac{2A}{A+B}=\frac{1}{2}, \frac{A(1-B)}{A+B}=-\frac{1}{4}$ 或 $\frac{2A}{A+B}=\frac{3}{2}, \frac{A(1-B)}{A+B}=\frac{1}{4}$。解得 $A=\frac{2}{3}$，$B=2$ 或 $A=2, B=\frac{2}{3}$。

因此 Γ 的方程是 $\frac{x^2}{\frac{2}{3}}+\frac{y^2}{2}=1$ 或 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{\frac{2}{3}}=1$。

在本题的解决过程中，由于引进了符号 A，B，X，Y，并利用题设，把求 A，B 先转化为求 X，Y，使推理过程变得清晰、简练。所以，在推理过程中能够恰当地引进和使用符号是具有数学技能的重要标志。

其次，数学技能还应该包含数学交流的成分。实际上，听、说、读、写、想等是人的日常生活中的基本心智活动方式，因此就有关于听、说、读、写、想等的基本技能。

在数学学习活动中，学生首先要听课，也要听同学关于数学知识理解的叙述，要使听的效果理想，就要有听的技能。例如听的过程中如何才能使自己的思路与教师保持同步；如何才能更好地领会教师的讲解；遇到不懂的地方应该怎么办；如何回答老师的问题；如何向老师提出问题等。另外，还要学会倾听同学的见解。

阅读数学教科书和练习册，阅读参考书等是数学学习的又一基本活动方式。在阅读的过程中，就涉及到如何掌握阅读的节奏；哪些地方应该精读，哪些地方可以泛读；如何阅读才能更加有利于发现问题；阅读中怎样才能抓住关键；应该如何进行阅读的检查，等。我们认为，阅读中是存在技能问题的，如果没有阅读的技能和技巧，往往会事无巨细，平均使用力量，使重点内容、关键

思想淹没在细节之中；或者是“走马观花”，抓不住重点和要害。例如，关于加法原理和乘法原理的阅读，[①]就定义来说，几乎就是常识，学生在阅读时一般会认为内容简单、道理浅显，因此常常认为一读就懂。但实践表明，问题并不这样简单，在解决具体问题时，大部分学生都会在“完成一件事情”中的这件“事情”到底指什么产生错误。例如，“乘积 $(a_1+a_2+a_3)(b_1+b_2+b_3+b_4)\cdot(c_1+c_2+c_3+c_4+c_5)$ 展开后共有多少项？”中的“事情”往往被学生认为是“把乘积展开”，而不知道这件事情是“写出展开式的一项”；“求10 800不同的正因数的个数”中的“事情”是“求……的个数”；……

数学学习的第三项活动方式是“说”，对数学情景进行描述，用自己的语言对数学的概念、定理、法则、定义等作出解释，向老师和同学准确地提出问题（使问题易于被别人理解），对老师和同学谈论自己遇到的困难，与老师和同学开展讨论，学会提问、答问、论述、证明和反驳，作出有关数学活动的口头或书面报告，都涉及到“说”的技能。在学生的学习活动中经常会出现这样的情况：心里明白到底是怎么回事，但就是表达不出来。其中的原因，除了没有完全理解相关数学知识外，不能很好地把相关知识巧妙地组织起来恐怕也是主要原因之一。

数学技能的第三方面是与计算机相关的技能。这种技能包括两个方面，一是计算机的操作技能和熟练运用软件的技能，二是简单的计算机编程。

数学技能的第四方面是自我评价和自我监控的技能。因为作为一种心智技能，数学技能是对数学活动（就学生数学学习来说，主要是认知活动）的调节方式，它是在数学学习过程中通过学生

---

① 刘国材的“关于中学数学教学改革的一些尝试”收录在《中国著名特级教师教学思想录·中学数学卷》中第178页

对学习材料的不断理解，产生主客体之间的相互作用，并使数学学习活动经验得到内化而形成的。这种活动经验中就包含了对学习过程的评价和调控的成分。

（二）数学技能的作用

1. 数学技能与数学知识经验的获得

前已指出，心智技能与经验获得之间的关系是非常密切的。同样的，数学技能与数学知识经验的获得之间的关系也是非常密切的，对于这一点，我们可以用建构主义理论加以论述。

建构主义认为，任何知识经验都是在个体生活及活动的基础上获得的，某一知识经验对个体来说是有意义的，这意味着个体与这一知识经验之间进行了相互作用，并且相应的知识已经内化到个体的认知结构中。数学知识不能像一本书一样从一个人的手里传递到另一个人的手里，而必须经过学生自己对经验的操作、交流和反省来主动建构。在建构过程中，既需要有作为活动对象的客观知识经验的作用，又需要有活动主体对客观知识的反作用，而且这种反作用是与个体已有认知结构的性质密切相关的。

在数学知识习得和数学活动经验产生的过程中，已有数学认知结构决定着主体对知识经验的反映形式、反映水平，其中最直接的是反映动作，这是一种心智动作。反映动作的根本职能是实现客观的数学知识影响向主观的经验结构的转化。这个转化过程就是能动的反映过程，就是数学活动经验的建构过程。这里，心智动作是数学活动经验获得的手段，而数学活动经验则是心智动作的产物。由于心智动作是获得数学活动经验的基础，因此，按照一定法则要求构成的数学技能在数学知识的习得、数学活动经验的获得过程中也具有十分重要的意义。数学技能是获得数学知识经验的必不可少条件。

正如张孝达在《理解知识，训练技能，发展能力，培养态度》一文中所说的，“初中数学尤其是代数中的技术性知识占有重

要的地位，比如有理数运算法则、整式四则运算法则、解方程步骤、各种图形、画图、证题基本方法等。这些知识必须转变成技能，否则这些知识既不能巩固，也不能应用；也只有在这些知识转变成技能后，其他的知识如有理数的性质、运算定律，方程同解原理和图形性质等才能变得有用；也只有在前面知识转变成技能后，才能比较容易理解新知识，比如，推导一元二次方程的解的公式，就要有整式运算包括因式分解、分式和根式运算等一系列基本技能，其中任何一个技能不过关，就会使推导产生困难。数学技能的重要性，越是在基础部分越是显著。所以，初中数学教学一定要重视基本技能的训练”。

2. 数学技能与数学知识的应用

在学生应用数学知识去解决面临的问题时，他首先要通过阅读题目或相应的材料来理解题意，即明确条件和需要解决的问题，从而明确了目标。在此基础上，从长时记忆中搜索相关的知识经验，并进行选择，再提取那些被认为是解决当前问题的最有效的知识，使它们进入短时记忆中。然后，在短时记忆（也叫工作记忆）中进行信息加工，使其中的各种信息产生相互作用，直至问题获得解决。其中，既有问题的解决过程，又有对解题过程的调节和控制。并且，在问题获得解决以后，还有对解题过程的反思。总之，应用数学知识解决问题的过程中包含了一系列以认知成分为主的操作。因此，心智动作，像如何判断问题的性质、如何选择问题的表征形式、如何搜索和提取相关知识、如何确定问题的转化方式、如何执行转化以及如何对解题过程进行评价等，构成了一种合乎法则的心智活动方式，即心智技能，它对数学知识的应用起着直接的指导和调节作用，是正确应用数学知识、顺利解决问题的保证。所以，数学技能是正确应用数学知识的必要条件。

3. 数学技能与数学能力

数学技能与数学能力之间的关系，有各种各样的观点，有的

甚至是对立的。有人认为，“数学能力是形成数学技能的条件和前提，它决定着数学技能形成的速度、深刻程度、熟练程度等，而数学技能又反过来促进能力的提高和发展”①。我们认为，这种观点是值得商榷的，它把数学能力与数学技能之间的关系搞颠倒了。我们赞成能力的类化经验说。按照能力的类化经验说，能力是类化了的经验，是概括化、系统化了的知识与技能。知识与技能是能力结构的基本构成要素，是活动的自我调节系统中不可缺少的构成部分。当然，我们必须用系统论的观点来看待知识与技能的概括化和系统化过程，即这个过程不是把知识和技能进行简单相加，在概括化和系统化的过程中，知识与技能都要实现结构重组，其功能将产生质的飞跃。所以我们说，数学能力是在获得数学知识、数学技能的基础上，通过广泛迁移，不断概括化、系统化，即类化而实现的。数学技能是数学能力形成与发展的一个重要因素。

在此，我们可以总结一下数学知识、数学技能与数学能力之间的关系。总的来说，它们是个体数学认知结构的三个有机组成部分，它们之间具有内在联系性，产生相互作用。但是它们又是有区别的。数学知识（数学的概念、定理、公式、法则、定义等）是一种语言信息，是客观事物在数与形方面的特征与联系在人脑中的反映，是数学认知活动中建立起来的一种认知经验。这种经验反作用于数学活动，可以起到确定数学活动的目标和方向、辨认数学活动的性质（如将进行的数学活动是计算还是证明，是否需要进行讨论，是由一般到特殊还是由特殊到一般等）、选择数学活动的程序的作用。因为活动目标的确定依赖于对当前的数学情景的辨认和分析，依赖于对各种变化的可能性的预测和判断，所有这些都需要以有关的数学知识为依据。而辨认数学活动的性质、确定数

① 丁尔升，主编.中学百科全书·数学卷.北京：北京师范大学出版社，上海：华东师范大学出版社，长春：东北师范大学出版社，1997，2.393

学活动的程序则依赖于的数学情景中材料的属性的认识，依赖于对数学材料的相互作用方式的把握，这同样需要以有关知识为依据。数学技能则是一种数学活动方式，是主体对数学材料作用以后产生的主体动作（主要是心智动作）经验，它对数学活动起着直接的调节与指导作用，是数学活动正确而顺利地进行的保证。数学技能在学生的数学活动中的自我调节功能，主要体现在活动的控制执行环节。由知识的作用而确定的数学活动程序，是在活动的控制执行环节中得以实现的。要使活动朝着预定方向前进，按照预定程序执行，达到预定目标，必须要有对活动的调节控制，即在学生头脑中应该建立起前后动作相继发生的动作经验链索。而数学技能就其存在形式来说就是一种链索型的动作经验。另外，对数学材料的处理方式和变换方式的有效性需要有相当的动作经验作保证；这也是数学技能对数学活动的调节控制作用的体现。

关于数学能力，目前还没有统一的认识。我们认为，数学能力是一种个性心理特征，它对数学活动的进程和方式起着直接的、稳定的调控作用。我们赞成把数学能力看成是在数学活动中获得的，是在掌握和运用数学知识、数学技能的过程中形成的，因此，数学能力原则上属于数学活动经验范畴。当然，它必须是系统化了的、概括化了的那些个体经验，是一种网络型的经验结构。[①]

由上所述可知，数学的知识、技能和能力是紧密地联系在一起的。数学知识和技能的掌握是形成数学能力的基础，能力又反作用于知识和技能的掌握，制约着知识掌握和技能形成的速度、深度、难易程度和巩固程度。因此，数学知识的习得、数学技能的获得和数学能力的形成同时存在于数学学习活动中，相互联系、相互制约，从根本上来说必须协调发展。由于能力是概括化、系统化

---

① 冯忠良.结构化与定向化教学心理学原理.北京：北京师范大学出版社，1998，4.147

了的经验，因此，掌握知识和技能需要有一定的能力，从这个意义上说，我们应当更加重视能力的培养。但是，能力不是在掌握知识、技能之前就已经具备的，也不可能脱离知识、技能的掌握而孤立地获得，这是我们在确定能力的重要性时所必须明确的。

（三）数学技能的特征

数学活动对象的特殊性决定了数学技能的特殊性。概括起来有以下几个方面：

1. 由数学活动对象的高度抽象性决定的特征

众所周知，数学是人类的一种创造性活动，创造的素材是那些具有普遍意义的“模式”，即数学的概念和命题、问题和方法等。由于“模式”是抽象的，因此数学活动就是一种抽象之上再抽象的活动，其中包括了模式的分析、模式的建构、模式的应用、模式的鉴赏等活动。显然，主体在这样的活动过程中所获得的动作经验也具有高度的抽象性，它有很高的“自由度”，因而也就有广泛的适应性，其迁移范围也更加广泛。另外，这种动作经验不仅来自于掌握具体的数学概念和结论的过程中，更主要的是来自于对数学知识之间的相互联系性的分析，来自于掌握有关的方法、问题和语言的过程中。

2. 由数学语言所决定的特征

数学语言是数学思维的载体，是表达科学思想的通用工具。数学语言是一种高度抽象的人工符号系统。数学符号的引进是数学发展的需要，数学的历史已经表明，数学符号的创造和运用对数学的进展具有重要意义，大量地运用符号正是数学的特点之一，也是数学的优越性的体现。数学技能的水平在很大程度上表现在对数学运算和符号操作的熟练程度上。另一方面，数学技能也表现在数学语言与日常语言（或称为普通语言）的互译上。事实上，数学语言是以日常语言为解释系统的，通过两种语言的互译，可以使抽象的数学语言在现实生活中找到“原型”，从而促进知识的理解

和掌握，实践表明，学生能用自己的语言解释概念的本质属性是学生深刻理解概念的一个非常重要的标志，而将日常语言翻译成数学语言则是一项常规的数学活动，是数学应用的必要步骤。

从数学符号学习的心理过程来看，也是一个从感性认识到理性认识的过程。学生不仅要理解符号引进的必要性，还要理解符号的内涵，更要熟练地掌握它的用法，这样才能达到理性认识。经过一定的练习，达到能够随心所欲地对符号进行等价变换，并在一个更加抽象的符号系统中把它们作为具体对象，这是符号学习的最高水平。

3. 由数学活动结构的性质决定的特征

数学活动是按一定的动作程序进行的，而这种动作程序是由数学活动对象的发生、发展过程决定的。数学活动对象是抽象的数学模式，数学活动是抽象之上的再抽象，它的动作主要是借助于内部言语进行的，由于内部言语是不完全的、片断的，并带有谓语性，因此数学活动动作成分是可以合并、省略和简化的。另一方面，数学活动有阶段性或层次性之分：① (1) 借助于观察、试验、归纳、类比、概括积累事实材料；(2) 由积累的材料中抽象出原始概念和公理体系并在这些概念和体系的基础上演绎地建立理论；(3) 应用理论。因此，数学活动可以看成是按照下列模式进行的思维活动：(1) 经验材料的数学组织化；(2) 数学材料（第一阶段活动的结果中积累的）的逻辑组织化；(3) 数学理论（第二阶段活动的结果中建立的）的应用。数学活动的上述三个阶段具有内在联系性，前一阶段是后一阶段的基础，后一阶段是前一阶段的发展。数学活动的层次性也是个体数学活动经验水平发展的一种标志，即数学活动的各个阶段都有其相应的数学活动经验水平。因此，与数学活动的层次性相对应，数学技能也表现出层次性。

---

① [苏] 斯托利亚尔 A A. 数学教育学. 北京：人民教育出版社，1984，7. 108

第二节　数学技能的形成

一　数学技能的行为指标

1. 准确性

前已指出，数学活动是受目标指引的认知性操作系列，其中涉及到对面临的数学情景的性质的判断，表征形式的选择，活动策略的确定，以及活动过程中对活动的调节与控制等心智动作，这些动作的准确性就成为数学技能水平的标志之一。

2. 速度

数学活动中动作迅速是数学技能水平高的重要标志。数学技能水平高的学生在数学活动中能够针对当前的具体情况作出迅速的判断，迅速地选择和提取有关知识。在数学学习活动中，数学技能在速度上主要表现在能够缩短运算环节，简化推理过程，“直接”获得结果。

3. 协调性

协调性是指数学活动中所涉及的各种心智动作能够相互配合，能够有意识地控制活动中的各种反应，动作娴熟、适当，能够恰当自如地运用数学符号（包括图形）来表达思想，手脑并用，读、写、看、算融为一体，动作连贯。

4. 自动化

在数学活动中，经过适当训练后，各相关的心智动作紧密地联系在一起，形成动作链索，并达到自动化的熟练程度，这是数学技能水平的又一个标志。这样的技能可以在头脑中表征为“技能组块”，在运用时只需占据少量的工作记忆空间，这就为其他的知识、技能进入工作记忆提供了空余空间，这样的技能就能够在数学活动中有效地与其他知识技能发生联系。

二 数学技能的形成

要了解数学技能的形成，必须首先了解数学活动和数学学习活动的实质。

（一）数学活动成分分析

关于数学活动的实质问题，郑毓信在他的《数学方法论》（广西教育出版社，1991年7月版）中从方法论的角度进行了比较详细的论述。总的来说，数学是一种人类活动，数学活动包括问题、语言、方法以及活动的最终产物——命题或理论；另外，还有支配或影响数学活动的数学传统。数学活动成分从总体上来说，可以分成为数学活动的客体成分和数学活动的主体成分。

1. 数学活动的客体成分

（1）问题

问题是数学活动得以进行的载体。从数学的发展历史来看，“问题的提出与解决”是它的基本形式，这其中既包括对问题的肯定性解答或否定性解答，又包括用新的方法来解决老的问题。另外，数学问题是具有时代特征的，即每一个时代都有它特殊的数学问题，例如，20世纪的数学问题就与希尔伯特在1900年国际数学家大会上提出的23个问题有较大的关系。从数学家个人的数学研究来说，数学问题也有着十分重要的地位，它实际上是数学研究的出发点，因此，对于数学家来说，确定一个符合自己实际情况的研究方向，从一个对自己具有挑战性的问题开始研究就是非常重要的。

（2）语言

这是指在数学研究活动中大家所一致接受的概念和符号系统。数学有特殊的语言和符号，它们是数学的重要组成部分。对于这一点，郑毓信有如下说明：第一，数学的历史在一定意义上是概念的发展与演变史，概念是从纵横两个方向发展的，如初等代

数的发展历史就与数概念的扩展直接相关，这是一种横向发展。像函数概念的发展，从早期的代数函数到18世纪的解析函数再到19世纪的变量函数最后到映射，则是纵向发展。数学中的概念组成了一个概念网络，相互之间有内在的联系性。正因为如此，在概念学习上，就既要从整体上把握概念系统，又要注意建立概念的“直观”背景，使抽象概念有一个坚实的直观基础。第二，与自然语言相比，数学符号有简单性和严密性的特点；数学符号还有可操作性。第三，数学符号对于数学发展来说是极其重要的，“好的符号往往伴随着易于使用它们的算法”，在数学发展史上，有许多例子可以说明缺乏能代表真正实质的符号而阻碍了某一领域的数学发展。另外，数学符号对于数学创造也是非常重要的，“正是数学的符号语言为数学思维的‘自由创造’提供了必要的‘物质形式’”，典型的是虚数单位 i 的引进，它可以使得虚数的讨论和复数运算顺利进行，而不必事先考虑它的现实意义问题。

正因为语言是数学知识的重要组成成分，在数学活动中就要特别注意数学语言的掌握和使用。同时也说明，在数学活动中有如何选择适当的符号而使数学理论的表述及推理更加方便有效的问题。

（3）方法

数学有自己的与众不同的方法。总的来说，数学是演绎地展开的，而各个数学分支又有自己特殊的方法，如代数中的符号方法，微积分中的极限方法，几何中的综合法，解析几何中的坐标法等。数学的发展与数学方法的发展、改进也有极大的关系，如欧几里德引进公理法而建立起演绎体系，从而使几何成为一门独立的、演绎的科学；现代数学则是与公理化方法的现代发展，即由实质的公理化方法到形式的公理化方法的发展直接相联系的，借助于形式的公理化方法，现代数学达到了新的、更高的抽象程度。数学方法是数学活动的重要组成成分，是数学的规律和本质的反映，只

有很好地掌握了数学方法，才能有效地进行数学活动。

（4）定理

数学定理是指在某个理论体系中，根据已有概念和真命题（被数学共同体所普遍接受的结论），按照逻辑规则，运用逻辑方法而证明其真实性的命题。从某种意义上说，数学理论的研究过程就是数学命题的证明（或证伪）以及以适当的方式将这些被证明的命题组织成理论体系。从数学活动角度来说，这种过程一般是需要多次反复的，要经历一个不断抽象、层层深入的过程。对于数学定理的认同是建立在数学共同体的共同信念之上的，需要通过充分的交流或解释，才能取得共识。另外，在数学中，存在着两种相互对立的数学理论并存的事实，这是其他自然科学中所很少出现的情况。

2. 数学活动的主体成分

数学活动的主体成分是指对如何从事数学研究的总的观念或思想。这种观念具有继承性和发展性，而且这种继承往往是不自觉的。数学活动的主体成分由核心思想、规范成分和启发性成分组成：

（1）核心思想

这是指关于数学本质的认识。

（2）规范性成分

这是指在数学研究活动中所应该遵循的各种准则，只有按照这些准则去从事研究，才能得到数学共同体的承认。如，怎样的语言才是恰当的？怎样的问题才是有意义的？怎样的证明才是严格的？

（3）启发性成分

这是指可以给人以一定启示或帮助的意见或建议。如，怎样才能提出有意义的问题？怎样才能有效地解决问题？

数学活动的主体成分反映在数学学习上，则是要求学生在数

学学习中有较强的自我意识，使自己的学习处于一种自觉的状态。在学习中对于以下问题都应做到心中有数：

当前的学习主要是解决什么问题？这些问题是怎样产生的？所学的知识中涉及到哪些概念？这些概念之间是以什么方式相联系的？需要哪些方法才能获得结论？这些方法有没有普遍意义？所学知识中是否包含特殊的符号或术语？……总之，数学活动的主体成分保证了学生的数学学习活动的方向性、自觉性。

（二）数学学习活动的实质

依据上述分析，我们可以对数学研究作出一个总体描述：数学研究一般是以一定的问题为出发点，通过构造、寻找、选择一定的方法，使问题获得解决，最后再以一定的语言将整个问题的解决过程（包括问题本身及最终的结果）表述出来。在此基础上，再将所获得的相关概念或结论系统化，组成一定的理论体系。其中，“模式建构”是数学研究的核心活动。这里所说的“模式建构”是通过理想化（对数学对象现实原型的必要简化和完善）、模式化（对从现实原型中抽象出的数学对象进行重新构造，以使它脱离与现实原型的联系而获得独立意义，从而使数学概念能够反映一类事物在量的方面的共同特征）、精确化（使数学概念获得严格的定义）、“自由化”（不仅通过直接的抽象来构造出具有明显直观意义的数学模式，而且通过思维的“自由想象”构造出各种可能的数学模式）、“形式化”（依据相应的定义进行推理，而不是求助于直观）而获得模式的数学活动。[①]这样，我们不仅可以把数学的概念、公式、定理等看成模式，而且也可以把数学问题和数学方法看成为模式。这里，可以看成模式的问题是指能够反映一类事物共同特性的那些问题，可以看成模式的方法是指具有普遍意义的那些方法。

---

① 郑毓信. 数学方法论. 南宁：广西教育出版社，1991，7. 123

从上述模式建构观出发，我们可以得出如下的结论：学生数学学习活动的实质是一个模式建构过程，模式的建构是通过如下三个阶段完成的：（1）模式定向，即了解模式的构成要素（与数学活动的客体成分相对应）及操作方式（与数学活动的主体成分相对应）；（2）模式操作，即再现性地应用模式，建立对模式的实践性认识；（3）模式内化，即对模式的认识已由感性认识上升到理性认识，并使模式融合到相应的系统中去。在模式建构过程中，学生形成了相应的心智技能，培养了分析模式、建构模式、应用模式和鉴赏模式的能力。

心理学关于心智动作的研究认为，心智动作虽然与实践动作不同，但它是实践动作内化的结果。"内化"就是外部动作向内部转化，即内部动作映像形成的过程，这种转化具有阶段性。在不同的阶段上，动作的执行方式不断得到改进，并引起动作本身映像的质变，这表明实践动作的内化过程是一种能动的反映过程。显然，心理学关于心智动作按阶段形成的理论与数学学习的模式建构分阶段完成的假设是一致的。由于心智技能由一系列心智动作构成，因此，心智动作的形成与心智技能的形成是一致的，心智动作的形成阶段也就可以用来说明心智技能形成的阶段。以下我们将以模式建构阶段来具体说明数学技能的形成。

1.模式定向

前已指出，模式定向就是了解模式的构成要素和操作方式，这是一个与掌握数学知识同步的过程，是数学技能形成所必须的一个阶段。由于数学技能是符合数学活动规则的活动方式，因此要使学生掌握数学技能，必须首先使他们在头脑中建立起如何进行数学活动的有关知识，这样才能调节自己的活动，作出合乎要求的动作。另外，要使数学活动有效地进行，还需要有对动作所内涵的操作程序的具体把握。而这些知识和操作程序是相应模式的基本成分，因此我们把这一阶段称为模式定向，它的主要任务是初步

建立起数学活动的自我调节机制，为进行实际操作提供内部控制条件。所以，学生在模式定向阶段首先要确定所学数学技能的实践模式（操作活动程序），其次要使这种模式的动作结构在头脑中得到清晰的反映。为此，教师在教学中应当引导学生充分开展自主的、独立的活动，以建立对构成活动的各个动作以及动作之间的执行顺序、动作的执行方式等的亲身体验，体会对动作、动作顺序与动作执行方式等作出各种规定的必要性，并引导学生自己概括出各步动作及其执行顺序，从而建立起对活动的完整映像。必须记住，学生通过活动而建立起的对情景处理的方式是知识学习、技能形成的最根本基础，活动是认识过程的根本因素。当然，由于学生认知发展水平的限制，需要有教师的指导，在数学技能的形成过程中则需要教师进行动作示范，而且示范要正确，讲解要确切，动作指令要明确，以使学生在头脑中建立起完整的关于数学活动模式结构的图式。

2. 模式操作

在了解了模式的基本成分和操作方式以后，学生通过再现的方式将数学技能的实践模式即操作活动程序计划付诸执行。在这一阶段，学生对模式的具体实例进行操作，依据前一阶段建立起的定向映像作出相应的动作，以熟悉动作的各个步骤，使动作在头脑中得到反映，从而在感性上获得完备的动觉映像。心理学认为，这种动觉映像是数学技能开始形成及内化的基础，所以，模式操作在数学技能的形成中是十分重要的。

为了使数学技能在操作水平上顺利形成，教师应该注意到：

第一，要使学生明确，在进行实际操作之前，首先应该确定活动的目标，这是顺利完成操作动作的前提。例如，求任意角的三角函数值的运算模式操作，首先要让学生明确，目标是将任意角的三角函数转化为锐角三角函数。

第二，开始时，要使学生养成依据模式所规定的动作顺序进

行系列操作，依次完成每一个步骤的习惯，还要养成在每个动作完成以后进行及时检查的习惯，以保证动作的方式能够符合模式的要求，使操作对象产生应有的变化。只有这样才能使学生确切地了解活动的结构，在头脑中形成完备的动作映像，获得正确的动觉经验，使获得方式具有稳定性，为动作定型奠定基础。例如，求任意角的三角函数值的动作顺序是：(1) 化负角的三角函数为正角的三角函数；(2) 化大于360°角的三角函数为小于360°角的三角函数；(3) 化小于360°角但不是锐角的三角函数为锐角三角函数；(4) 查表求值；(5) 检验。

第三，要使学生明确每一个操作步骤的根据，这是知识掌握与技能形成同步的要求。例如，上例中，各个步骤的依据分别是：(1) 根据三角函数的奇偶性；(2) 根据终边相同的角，其三角函数值相同；(3) 根据诱导公式；(4) 三角函数表的结构。

第四，要注意变式的作用。使学生在变化的数学情景下进行模式操作训练，使活动方式能够在直觉水平上得到概括，从而形成关于活动的表象，有利于学生对数学技能的掌握，并为内化创造条件。

第五，应要求学生用自己的语言叙述模式操作的目标、步骤及其依据。数学技能作为一种活动方式，主要是借助于内部语言默默地进行的，而内部语言是由外部语言转化而来的。心理学认为，在模式定向和模式操作阶段，外部言语作为心智活动的标志及执行工具，在模式内化过程中具有十分重要的意义。在边做边说的场合下，活动易于向言语执行水平转化。所以，用自己的语言对数学活动的全过程进行描述，是数学技能训练中的一个重要措施。另外，用自己的语言描述数学活动的过程，对于促进学生对活动的理解也具有重要作用，而且也是检验理解和技能掌握水平的一种手段。

第六，应注意掌握活动的节奏，并适时向下一阶段转化。模型

操作（练习）对于数学技能的形成是必须的，但是并不能说练习得越多效果越好，这里有一个“练习度”的问题。所谓练习，就是学生对学习任务的重复接触或重复反应。这里的重复是学生对已经了解的数学知识、数学活动经验应用到具体情景中的一种重现，而不仅仅是机械重复。

有研究认为，数学理论的内化可分为两个阶段：第一阶段，学生首先意识到数学知识内容（what），然后开始考虑其逻辑依据（why），再寻求这一内容的思维过程（how），这意味着新知识要转化为个人参照系，使其与本人已有的数学认知结构趋于和谐；第二阶段，数学知识的应用和保持，即在变化背景中应用数学知识，获得反馈信息，对已有的理解进行矫正。在理解了抽象意义之后，把它“转移”到自己熟悉的、联系紧密的、浅显具体的事物中去，即由抽象到具体。我们认为，数学知识的内化过程与上面所说的数学技能的形成阶段是相互协调的，其协调的媒介就是练习。因为在数学知识的内化过程中，第一阶段的why-how两个过程都是对数学知识的反复接触和重复反应，是一种练习；第二阶段的实质也是理解性的练习，而通过这些练习就可以形成相应的数学技能，积累一定的数学活动经验。

显然，练习中应该重在理解，重在变式训练，而不能只追求练习的数量。只要连续多次能够正确而顺利地完成有关动作程序，就应该转向下一个阶段，否则，盲目重复地进行训练，其效果只能是“报酬递减”，而且会使学生对练习产生错误理解，形成不正确的练习态度。

3. 模式内化

模式内化就是数学活动的实践模式（操作程序）向头脑内部转化，就是动作要离开具体背景（模式的事例）而转向头脑内部，借助于抽象的语言来作用于自己头脑中的数学知识，从而对自己所理解的数学知识及相应的活动方式进行概括，并进一步类化，使

其具有更加普遍的意义。模式的内化水平从两方面得到反映：一是头脑中形成的模式的抽象程度；二是活动方式的定型化、简缩化、自动化程度。

数学模式具有层次性，通过逐级抽象而达到更高的概括性，从而使模式具有更加广泛的适用性（意义上的普遍性)。数学模式的内化是以模式操作为基础和条件的。例如，波利亚在《数学的发现》中，曾经给出过四个解题模式：双轨迹模式、迪卡尔模式、递归模式和迭加模式，这些模式的最终掌握（内化），需要经过对具体事例的概括，获得具有一般意义的操作步骤，然后再进一步类化。这个过程实际上是模式的逐步抽象化的过程。波利亚通过对一些具体例子的详细而周密的描述，不仅指出其具体解法，而且还分析了解答中所内涵的实质性步骤，以及为什么要采取这些步骤的理由和相应于每一个步骤的根据，从而逐步地概括出一般的模式。

(1) 双轨迹模式

波利亚通过对具体问题“已知三角形的三边长，求作一个三角形”解答的分析，在“考虑能否从中发现一些我们所希望的、具有特征性的东西，以便在其他场合用于解类似的问题”的思想指导下，获得了一个解题模式——“双轨迹模式”，然后他将这一模式在几何作图范围内进行推广，得到了“在若干场合下可以成功地解决几何作图问题”的方法（模式）：

首先，把问题归结为要确定一个点。

然后，把条件分成两个部分，使得对每一部分，未知点都形成一个轨迹；而每一个轨迹必须是一条直线或一个圆。

进一步地，波利亚把这一模式在立体几何直至代数范围内进行了再推广，从而获得了这一模式的更加一般的形式：

“问题的已知量是x。问题的条件分成l个分款，我们用有l个符号方程的方程组来表示：

$r_1(x)=0, r_2(x)=0, \cdots, r_l(x)=0$。

满足第一个条件分款（由第一个符号方程表示）的对象组成一个确定的集合，我们称为第一条轨迹。满足第二个分款的对象组成第二条轨迹，……满足最后一个分款的对象组成第 l 条轨迹。所提问题的解——对象 x 必须满足全部条件，即所有 l 个条件分款，因此它必须同时属于所有这 l 条轨迹。另一方面，任何一个对象 x 如果同时属于 l 条轨迹，即同时满足 l 个条件分款，它就是所提问题的一个解。简言之，这 l 条轨迹的交点组成了解的集合，即满足所提问题条件的全部点的集合。”

(2) 笛卡尔模式

笛卡尔想构造一个能够解决一切问题的“万能方法”：

第一，把任何问题转化为数学问题；

第二，把任何数学问题转化为代数问题；

第三，把任何代数问题归结为解方程问题。

波利亚认为，尽管笛卡尔的想法无法实现，但是他却给出了一个十分有用的思维模式。波利亚通过分析“一个农夫有若干鸡和兔子，它们共有50个头和140只脚，问鸡和兔各有多少？”的代数解答，论述了“代数方法”的优越性，并概括出了所谓的“笛卡尔模式”：

首先，在认真理解题意的基础上，把它归结为确定若干个未知量的问题；

其次，用最自然的方式通盘考虑一下问题，设想它已经得解，把已知量和未知量之间应满足的一切关系式都列出来；

再次，用两种不同的方式表示同一个量，得出一个联系未知量的方程式。如此做下去，使方程个数与未知量个数相等而得一组方程组。

显然，这一模式是通过“列方程、解方程”来解决问题，列方程的关键是“用两种不同的方式去表示同一个量”。

波利亚对笛卡尔模式也作了一般情形的推广："在条件的分款没有被翻译成一个方程，或甚至 x_1，x_2，…，x_n 不是未知的数，而是任何类型的未知的事物的情况下，我们认为符号方程 $r(x_1, x_2, \cdots, x_n)=0$ 也表示了由问题的条件所决定的、包含了指定未知量（为方便计，我们把一般的未知事物统称为未知量 x_1，x_2，…，x_n）的一个关系。"

（3）递归模式

通过对和 $S_k=1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k$ 的求解过程的分析，波利亚给出了"递归模式"。他认为，问题要计算的量可以看成是无穷序列 S_0，S_1，S_2，…，S_k，…中的一个。显然，$S_0=1+1+1+\cdots+1=n$。又序列中的前 k 项有关系式：$(n+1)^{k+1}-1=C_{k+1}^1S_k+C_{k+1}^2S_{k-1}+C_{k+1}^3S_{k-2}+\cdots+C_{k+1}^kS_1+C_{k+1}^{k+1}S_0$，因此，如果我们知道 S_0，S_1，S_2，…，S_{k-1}，由关系式就可以得出 S_k，又由于我们已经有 S_0，因此，我们就可以根据关系式"一个接一个依次地、递推地"将所有项都求出来。

对上述过程进行概括，就可以得到"递归模式"：

"对于一个依次排列起来的序列（如上面的 S_0，S_1，S_2，…，S_k，…），我们可以去算它当中的任何一项的值，每次算一个。为此需要两个先决条件：

首先，应当知道序列的第一项。

其次，应该有每个关系式将序列中的一般项与它前面的那些项联系起来。

这样我们就可以借助于前面的项，一个接一个依次地、递推地把所有的项都找出来。这就是重要的递归模式。"

（4）迭加模式

通过对具体问题"圆周角的度数等于它所对弧的度数的一半"的证明的讨论，概括出了"迭加模式"，即从一个特例出发，利用特殊情形的迭加而得出一般问题的解。这一模式通常有两个

步骤：

第一，先处理一个特殊情形。这个特殊情形应当是既容易解决，又有利于推广而得一般情形的解答。

第二，用某种指定的代数运算（即所谓的“迭加”）把特殊情形组合起来，从而获得一般情形的解答。

从上所述，我们可以看出，模式是通过逐级抽象形成的，与此相对应，模式的内化也是经过逐级抽象而实现的。在内化的过程中，先要通过对模式的具体事例的操作，以获得对模式的一种感性理解，然后再逐渐概括出相应的操作程序，获得对模式的理性认识。显然，随着概括性操作活动的深入，学生头脑中的模式的抽象程度不断提高，模式的适用范围也在不断扩展，这也是一个模式内化不断深入的过程。

值得指出的是，学生头脑中形成的模式的抽象程度与学生对相应模式的本质的把握程度直接相关。例如，对于公式 $\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$，从模式的抽象性角度来说，主要表现在对变量 θ 的把握上，真正把握它的本质表现在学生头脑中 θ 的“自由”程度上，它是否可以在智力活动中根据具体情况、随主体的意愿而作出选择。而从公式的表达形式来说，也可以是充分“自由的”，主体可以根据需要将公式变形。例如可以把公式变形为：

$$\cos\theta=\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right),$$

$$\cos 3\theta=\cos^2\left(\frac{3\theta}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{3\theta}{2}\right),$$

一般的有 $\cos f(x)=\cos^2\left(\frac{f(x)}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{f(x)}{2}\right)$；

$$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1,$$

$$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta,$$

一般的有 $\cos 2f(x)=2\cos^2 f(x)-1$，

$$\cos 2f(x)=1-2\sin^2 f(x);$$

$$\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2},$$

$$\sin^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2},$$

一般的有 $\cos^2 f(x)=\frac{1+\cos 2f(x)}{2}$,

$$\sin^2 f(x)=\frac{1-\cos 2f(x)}{2};$$

……

以上 $f(x)$可以是任意一个数、式、函数等，立体可以充分自由地使用。

另一方面，活动方式的定型化、简缩化和自动化也与对模式本质的实质性把握相关。不过，这里仍然有一个通过练习而熟悉操作程序的问题。在模式内化的开始阶段，数学活动应该严格地"按部就班"，每一个步骤都不能省略，而且进入某一个操作步骤时，应该让学生在心中想"根据是什么?"此后，依据活动的掌握程度，再进行缩简，其中包括省略某些动作成分或合并某些相关的动作。例如，在解一元一次方程时，开始应当严格按照"去分母、去括号、移项、合并同类项、……"进行，并最好配合以一定的外部言语活动（自言自语），训练到一定的时候，再进行缩简，根据具体问题而合并某些动作（例如去括号和合并同类项可以同时进行）。在这一阶段上，也要注意使用变式，使学生有机会面对不同情景下的动作对象，能够经历活动方式的概括过程，以保证建立的模式能够广泛地适用于同类课题。另外，应当把握好从动作定型到缩简再到自动化的转化时机，不能过早，也不能过迟。

总的来说，数学学习中的模式建构活动一般都应当经历上述三个阶段。特别是在中小学数学学习中，三个阶段不能偏废。不过，数学技能一旦形成，就会有很好的迁移性，因此我们又应当充分利用已形成的技能来为新的学习服务。

第五章　数学课堂教学改革问题

成功的数学课堂教学建立在科学的教学观上，建立在对学生数学学习心理的全面把握上。上面几章我们主要以各类数学材料（概念、原理、技能等）为背景，对学生的数学学习心理作了一些分析。我们知道，学习知识的目的是为了应用它去解决问题，或者说，解决问题的过程是知识、技能的综合应用过程。因此，除了明确数学概念、知识和技能的不同习得过程与条件外，还应该明确它们是如何被综合应用于解决问题的情景中的。

另一方面，从数学活动角度看，数学知识的学习与应用应该看成是数学活动过程的两个方面，它们统一于活动过程中。因此，我们将以数学课堂教学活动为背景来阐述我们的观点。

第一节　建立在主体活动理论上的课堂教学观

一　对教学过程中主体的再认识

“学生是主体，教师是主导”，这是众所周知的命题。我们认为，对这一命题应该进行重新认识。

事实上，主体是相对于客体而言的。主、客体之间的关系是在实践活动中体现出来的。主体是实践活动的承担者，具有主动性；客体是实践活动的承受者，是被动的。因此，究竟谁是主体、谁是客体，应该由其在实践活动中的地位来确定。

对于教学活动来说，我们认为应该把从教师备课、课堂教学的实施以及课后作业等看成一个完整的过程。在这个过程中，师生双方扮演着不同的角色，各自从事着具有相互联系、相互制约的活动。学生在教师的活动中是客体，教师把学生当成客体来认识、影响甚至“改造”他们；学生是自己活动中的主体，他们必须通过自主活动来认识事物、掌握知识，使自己的身心获得发展。当然，学生在教学过程中担当起主体这个角色，有一个从不自觉到自觉的发展过程，这主要是因为学生正处于身心发展阶段，随着年龄的增长，认知水平的不断提高，学生的主体地位会变得越来越突出。

对教学过程中的主体、客体作上述认识具有积极的意义。首先，把教师当成教学过程的主体，是把教师摆在了这样一种位置：教师是教学过程的认识者、组织者，他对教学过程所涉及的各种因素（如教学内容、学生等）进行认识，这是一个科学探索的过程，是体现教师创造性的过程，课堂教学对教师而言，“不只是为学生成长所作的付出，不只是别人交付任务的完成，它同时也是自己生命价值和自身发展的体现。”而过去恰恰是对教学过程的这一价值认识不充分，只把教师当成“蜡烛”——“燃烧了自己，照亮了别人”，把教学看成是教师的一种纯粹付出的劳动，教师自己没有从中得到什么。这种认识的消极意义是显然的：教师在课堂教学中的主导作用实际上成了“主宰作用”，以知识传授和技能训练为课堂教学的主要任务，教师的劳动成了枯燥的、重复性的；学生的主体作用成了“主听作用”，学生在课堂教学中充当的是被动接受者的角色。这样，教师和学生的积极性都得不到充分发挥。只有把教师和学生都看成是教学活动中能动的角色和要素，把师生双方的关系看成是互为主体、互相依存、互相配合的关系，才能真正反映教学活动的本质，“使师生的生命活力在课堂上得到充分发挥”，使教学过程本身“具有生成新因素的能力，具有自身的、

由师生共同创造出的活力。”我们认为，教师的主体作用主要体现在他对教学活动进行科学认识的过程中，教学过程中教师的主导是他发挥主体作用的一种表现形式。把教学作为教师自己的一个认识过程、发展过程，这是符合事实的，这种观点能够促使教师把教学当成一种事业来追求，把每一堂课都看成是发挥自己创造力、施展自己才能的机会，看成是发展自己的一个机会，把上好一堂课看成是自己生命价值的体现。

以上关于教学过程中主、客体及其关系的认识也符合心理学关于主体活动的理论。众所周知，任何心理活动、心理发展都需要心理能量，就像机器的运转需要能源一样。俄罗斯学者什维尔科夫近期指出：生命的积极性来源于基因组，基因组的积极性是在物竞天择、适者生存的条件下形成的，而基因组的积极性是通过神经元的新陈代谢不平衡表现出来的，最终反映在有机体的外部活动中。这一观点对我们理解心理能量具有重要的启发，我们可以认为，心理能量存在于人的神经系统中，作为心理活动和心理发展过程中主体积极性的基础。在人的实践活动中，主体的积极性存在于主体内部，通过主体与客体之间的相互作用所产生的心理不平衡而表现出来，并在主体活动中得到反映，而心理能量则起了维持主体积极性的作用。从而，为了使得实践活动有效地进行下去，主体的心理内部必须保持不平衡状态，使心理能量得到充分发挥，以维持主体在活动过程中的积极性。这样，如果只把教师当成教学活动中的主导，他就成了一个教学活动的“局外人”和“旁观者”，他对教学过程中各种因素之间的相互关系、内在联系就不可能有亲身体验，从而也就不可能产生心理内部的不平衡，教师的心理能量也不可能发挥作用，在教学活动中也难以表现出积极性来。因此，将教师看成是教学过程的主体，有利于解释教师的教学积极性的来源问题。同时，从上述论述中我们也可以看到，设法激发并且维持学生心理内部的不平衡，是激发学生心理能量的作用，

引起学生在教学过程中的主体积极性的最根本的措施。

二　教学活动使师生双方的主体性都得到发展和发挥

明确了教学活动中的主体、客体及它们之间的关系问题以后，我们就可以来讨论教学活动中发展和发挥学生的主体性，以及教师的主体性既在教学活动中得到发挥，又在教学活动中获得发展的问题。

主体性是人作为活动主体而表现出来的，既包括主体精神又包括主体能力。它所包含的内容是人在自觉活动中不可缺少的“能动性、创造性和自主性”。人无论作为实践主体、认识主体或评价主体，都具有这些共同属性。而客体性是与主体性相对应的，是作为活动的接受者或被指向者的事物的共同属性。主体性是主体在与客体相互作用的漫长历史过程中逐步发展起来的。从某种意义上说，主体性是处于终身发展状态的，它既在实践活动中发挥能动作用，又在实践活动中不断得到培育和塑造。

由于我们持教学过程的“双主体”观点，因此，我们认为，师生双方的主体性在教学过程中都得到了发展和发挥，只是在方面、水平上存在差异而已。

对于学生来说，通过教学活动，随着他们认知能力的增长、情感体验和情感控制能力的加强，他们的不成熟的、不完全的、开始甚至是很微弱的主体性获得了培育和发展(即学生的能动性、创造性和自主性在不断提高)，与此同时，他们的主体性也发挥着越来越强有力的、重要的作用。因此，在教学过程中，教师既有培育学生主体性的任务，又有发挥学生在教学过程中主体性作用的任务。实际上，这两者是相辅相成的。

对于教师而言，由于他们已经具备了一定的发展水平，因此首先是要独立自主地发挥能动的主体作用，培育和发展学生的主体性，这是教师发挥主导作用的体现。为此，教师在关注学生的认

识发展（作为课堂教学的中心任务）的同时，还应该特别注意具有独立内容和价值的情感的发展，以实现教学活动中完整的人的教育，塑造并实现学生在未来发展上成为社会主体的人的主体性。这就要求教师在教学过程中渗透情感目标，对学生进行意志、合作能力、行为习惯、交往意识和交往能力等多方面的培养和发展。这里需要强调的是情感目标的独立性，而不能把它作为服务于认识任务、依附于认识发展的东西来看待。另一方面，教学过程又成为培育和发展教师自己的主体性的过程。首先，作为一个终身从事学校教学工作的教师来说，尽管他可能始终在教同一门课，他对这门课所涉及的知识的认识可能已经达到非常成熟、完整的水平，但是他所面对的学生是千变万化的，每一堂课都会有不同的具体情况，每一个教学过程都是唯一的、不可重复的、丰富而具体的综合，因此教师每一天都在经历对教学过程的不同的认识过程和对教学的不同的情感体验过程。完成这种认识过程和体验过程，既体现了教师的主动性、创造性和自主性，实现了教师的生命价值，又使教师对教学客观规律的认识达到了新的高度，使他对在教学过程中应该如何更好地培育和发挥学生的主体性、关注学生的个体差异并为每个学生都提供主动积极活动的条件、促使教学中各种信息的多层次、多方向交流、为教学过程提供及时的、积极的反馈等，都有新的认识，从而进一步增强运用教学客观规律培养和发展学生主体性的自觉性，更加牢固地掌握教学的主动权。我们认为，这正是教师主体性的培育和发展的过程。

三　发展和发挥主体性的途径：主体活动和过程教学

显然，对教学过程的本质作如上认识，会带来教育观念的改变。首先，教学过程是师生双方主体性获得发展的过程，也是师生双方的主体性得到充分发挥的过程，而主体性的“发展”是“发挥”的前提和保证，“发挥”又可以促进和加速“发展”；其次，教

学应该促进师生双方的全面发展：对于学生来说，全面发展意味着他的认识能力的提高和情感体验、情感控制能力的增强，表现为能动性、创造性和自主性的发展和完善；对于教师来说，全面发展意味着教师既要教学生又要教自己，既要对自己所教课程的知识体系的内容、内在联系性、思想方法等进行研究，并对教学过程中如何发展学生的主体性进行研究和设计，还要在教学过程的进行中不断对自己对教学过程客观规律的认识结果进行反思（教师对教学的自我监控），不断地发展和完善自己的主体性，即创造性地设计教学过程，洞察课堂中发生的各种问题，并准确地判断发生问题的原因，能动地、有效地处理这些问题，把握教学活动的自主权。

如何才能实现主体性的发展，发挥师生双方在教学过程中的主体作用呢?显然，必须通过主体自己积极主动的活动，而强调展示教学内容的过程性，强调在知识的发生发展过程中完成认识任务，则是主体进行积极主动活动的根本保证。

按照辩证唯物主义的观点，生命存在的普遍形式是活动，杜威也说，有生命的地方就有活动。"实践活动是人的心理、认识、意识产生和发展的基础。"人的心理是在活动中形成和发展的，人的个性的丰富程度取决于他的活动内容。从发展心理学的角度来看，活动贯穿人的一生，人的心理发展到什么水平和阶段，他的活动就会表现出相应的特点。如果剥夺人的活动自由，他的心理发展就会受到阻碍。因此，人的主体性的发展基础是实践活动。只有在活动中和通过活动，主体和客体、主观和客观才能得到统一，主体性才能获得发展。

众所周知，教学活动是有特定内容的，学科知识是教学活动的载体。学科知识是人类社会已经掌握的知识，它们以教科书的形式出现，是通过科学家整理、归纳和概括的抽象逻辑体系，这种逻辑体系在某种程度上掩盖了相应知识的发生发展过程。例如数

学教科书，通常只是按照知识的逻辑顺序安排，只讲“可以这样做”或“应该这样做”，而对“为什么可以这样做”和“为什么应该这样做”却很少涉及。但是，“数学是一池活水”，新的概念为什么要引入？定理是如何想出来的，有什么作用？等等，所有概念的引入都是顺理成章的、有根有据的。在数学的严格逻辑演绎体系的建立过程中，也经历了先发现问题、再总结规律而猜测出定理；先试验、猜测定理的证明思路，再具体实施证明，并在证明过程中不断修改、矫正思路，最后才能获得完善的证明。因此，教师就应该设法引导学生探讨这些“为什么”，理解数学中的“道理”和“意思”，还数学以生动活泼的本来面目。要使数学教学过程在某种程度上反映出数学的创造过程，做到既让学生理解“证明”，又让学生学会“猜测”，使学生能够“知其然又知其所以然”。我们认为，教师设计出适当的教学情境，让学生在这样的情境中像数学家那样自己去猜想、发现真理，比机械模仿、记忆那些不理解其来源、意义和相互联系的命题和证明的现成体系更容易使学生获得全面发展；在教学中采取组织学生讨论的办法，调动起他们的经验、意向和创造力，让学生能够重新发现数学命题内容的事实，然后从逻辑上把它们整理成系统，这不但会使学生真正理解学习材料，使他们的思维能力获得较快的发展，而且也能更有效地发挥学生的主体作用，并使学生的主体性得到更好的发展。这样的教学对教师也提出了高要求，在设计教学情境时，他们不再能够套用教学参考书提供的教学范例，而必须根据所面临的学生的实际情况，从内容的组织、方法的选择、课堂活动方式的选择和教学过程的组织，还有反馈方式的选择等，都作出重新安排。设计过程中，不但要考虑为发展学生的主体性提供条件，而且还要根据班级里每一个学生的具体情况，为他们提供主动积极活动的保证。在课堂教学进程中，还要根据当时的具体状态作出灵活的、创造性的处理，例如，当原来的设计不足以引起学生的自主活动时该怎么办？当学生

给出了原来未预想到的创造性答案时应该作怎样的评价?如何使学生自己发现思路中的错误?如何使学生感受到你的期待?如何引导学生合作学习，引导学生对有关问题进行辩论，碰撞出创造性思维的火花?如何使学生感受到你给他的是真诚、善意的帮助?怎样与学生分享成功的喜悦?……显然,这样的教学不但体现了教师的主导作用，发挥了教师的主体性，而且也使教师的主体性得到了发展。

以上是对体现主体性的活动的重要性的认识。怎样才能保证活动的真正有效进行呢?我们的回答是“过程性”。也许有人会说，活动总是在过程中进行的。但是我们必须注意到,教学活动与人们的日常生活、工作中的活动，与科学家的科学研究活动是有区别的，这主要是由于活动内容的差别引起的。从某种意义上说，教学活动的内容与学生的现实生活有一定程度的分离，这些内容是超越他们现实发展水平的，它们在现实生活中的作用也是学生所不能完全理解和切实感受到的。因此,相应于教学内容所应该进行的活动往往受到歪曲、变异、分离、形式化、表面化。例如，正如前面已经说过的，在数学教学中，由于数学教材是按照数学理论的逻辑体系编写的，而这种逻辑体系中的知识呈现顺序与数学理论的真实发现过程往往是相反的（真实发现过程常常采用“分析法”，而逻辑体系则采用“演绎法”)，因此，根据教材所进行的学习往往是“反思维过程”的活动：把数学当成纯粹的数学推理，当成“逻辑推理”的一种形式来学习，而获得数学理论时的那种直觉、猜想、试验等过程都被忽视了，学生的活动过程表现为听教师讲逻辑推理过程、模仿逻辑推理过程，他们所学到的是一些确定的、形式化的、僵化的东西，活动过程中没有精神的作用，思考过程程式化，原来应该具有的那种不确定性、似真性被大大淡化，数学本来具有的丰富多彩性、变化性都被深深地掩盖起来。显然，在这样的过程中所进行的活动，是难以发挥学生的主体性的，

在这样的活动中，学生的主体性也是难以得到真正发展的。因此，我们认为，在学校教育中，课堂教学活动并不能自发地展示有利于发展学生主体性的过程，它需要教师发挥自己的主体性，对教材进行变革，对教学活动过程进行创造性的设计。例如，在数学教学活动设计中，由于数学的认识过程不仅仅涉及分析、综合、抽象和演绎等逻辑思维活动，归纳、类比、联想、化归、审美、直觉等形象思维活动所起的作用也是至关重要的，因此，教师应该改变教材从概念到概念、从定理到推论、处处强调逻辑演绎的严格性的局面，为学生提供概念、定理的实际背景，设计定理、公式的发现过程，让学生的思维能够经历一个从模糊到清晰、从具体到抽象、从直觉到逻辑的过程，在由直观、粗糙向严格、精确的追求过程中，使他们体验定理内容的根本思想，掌握定理证明过程的来龙去脉。学生在对概念形成过程的分析中，在对公式、定理的发现过程的总结讨论中，领悟寻找真理和发现真理的方法和手段，培养分析问题、解决问题的能力。因此我们说，“过程教学”需要教师创造性的劳动，体现了教师的主体性；同时，“过程教学”对于学生主体性的发展以及发挥学生自己的主体作用也是至关重要的。

以上我们从马克思主义关于“主体是人”，是“积极地活动着的人”的观点出发，对教学过程中的主体、客体及其关系进行了讨论，我们认为，教师和学生都是教学活动中的主体，但是，这两个主体的发展水平、所面对的客体是不同的，因此他们在教学活动中所承担的角色也是不同的，不过，他们之间的关系是互为条件、对立统一的。在教学活动中，存在着师生双方的主体性都获得发展、师生双方的主体性都得到发挥的事实，这两个主体性的发展、发挥互为前提，呈现互相交替、互相促进的状态。我们认为，教学改革的关键是教师，而过去教学改革的不深入，其原因也主要是对教师的主体作用、教师的主体性的发展和发挥重视不够，这

样就难以全面看到教学工作对于教师的价值，因而也就难以对教师提出符合教学客观规律的要求。为了发展、发挥师生双方的主体性，我们提出了在数学知识的发生、发展过程中师生双方共同活动的原则，认为“过程”的设计需要教师的创造性工作，需要发挥教师的主体性，而学生在“过程”中进行自主活动，对于发展、发挥他们的主体性具有至关重要的作用。

第二节 数学教学要适应学生的认知发展水平

前已指出，数学教学既有培育学生主体性的任务，又必须发挥学生在数学学习中的主体作用，这是一个矛盾的两个方面。而且，这两个方面都是以学生的认知发展水平为前提的。因此，教师根据学生思维、智力的发展水平，为学生提供相应的学习活动情景，使他们在这种活动情景中自主地进行数学学习，通过他们自己独立的思维活动来获取知识、发展思维能力和创造力，这是数学教学的一项基本原则。

发展心理学的研究成果表明，学生的思维发展呈现一定的阶段性。皮亚杰认为，人的认知发展是一个认知图式不断重建的过程，它可以划分为几个阶段。这种认知阶段具有以下特点：

第一，认知发展过程是认知图式不断地组织和再组织的过程，过程的进行是连续的；但由于各种发展因素的相互作用，使认知发展呈现阶段性。

第二，每一阶段都有其独特的认知图式，标志着一定阶段的年龄特征。

第三，各阶段出现的顺序固定，不能逾越，也不能互换。但由于遗传、环境、教育以及主体动机等的差异，新阶段出现的时间可以提前或者推迟。

第四，认知图式的发展是一个连续不断的建构过程，前一阶

段的图式是构成后一阶段的图式的基础，但两者具有质的差异。

第五，认知发展的两个阶段之间不是截然分开的，而是有一定的交叉的。

皮亚杰以符号逻辑为工具，采用逻辑和数学的概念来描述发展阶段的特征，把“运算”水平当作认知发展阶段的依据，将认知发展划分为四个阶段：感知运动阶段（0～2岁）、前运演阶段（2～7岁）、具体运演阶段（7～11岁）和形式运演阶段（11～15岁）。这一发展阶段理论已经被许多实验所证实，是国际心理学界所普遍接受的理论。我们必须重视皮亚杰所说的思维发展顺序问题、发展的连续性问题以及在具体思维过程中的“返祖”现象。例如，学生的思维发展到形式运演阶段后，具体运演行为仍然存在，并且日益整合为一个形式运演的更加综合的系统。他们在数学活动中并不只是运用形式运演思维，而是要经常地借助于低阶段的思维。面临新的知识，他们常常重新回到具体思维阶段，有时甚至是回到前运演思维阶段上去。他们在进入抽象思维形式之前，总是要先获得新知识领域的具体经验。

由皮亚杰的理论我们可以看出，学生进入初中后，形式运演思维开始发展，并逐渐走向成熟，但具体运演思维仍在继续发展。具体说，在进行形式运演思维活动时，仍要借助于低水平的思维；高中学生的形式运演思维进一步发展和完善，但学生在学习时仍要借助于具体运演思维甚至是前运演思维，即具体经验对学生学习新知识来说仍然是必不可少的。

在具体的学习进程中，学生利用他头脑中已有的认知结构与新知识进行相互作用，通过自主的思维活动对新知识进行理解，将新知识同化到已有的认知结构中，或改变已有的认知结构以顺应新的知识，从而形成新的认知结构。

我们认为，教师要意识到学生思维发展的阶段性以及相应的思维水平，尊重学生现有的学习能力，并以此为依据，制定相应

的教学策略和教学程序，以激发学生认知上的不平衡，促使新旧知识相互作用，通过同化或顺应，使学生达到新的认知平衡，从而获得新知，促进学生的思维发展。

一 处理好教材与课堂教学之间的关系

数学教科书为数学课堂教学提供了线索，但是在具体实施课堂教学时，教师必须对教材进行教学加工处理。在处理过程中应该做好以下几方面的工作。

1. 按照学生的数学思维活动规律组织教材

前已指出，教科书是按照“定义-定理、公式、法则-应用”这样的逻辑顺序编辑的，这种逻辑顺序与原数学研究活动顺序往往是相反的，与学生数学学习的思维活动顺序，即“问题一定理、公式、法则一定义”的顺序也是相反的。虽然教科书也可以先提供一定的实际问题，然后再概括出定理、法则、公式等，但这种进程在教科书上只能是十分简约的。由于学生的学习要大致经历原数学研究活动的进程，因此，教师不能照本宣科，否则，必然使教学进程与学生的数学思维进程不一致，从而使学生的思维活动无法充分展开，学生已有的数学认知结构与新知识之间的相互作用不充分。因此，教师要把教材提供的逻辑顺序转变为数学活动顺序，并结合学生的数学思维发展水平，安排恰当的数学课堂教学情景和数学思维活动进程，以使课堂教学活动适合学生的认识发展规律。

2. 选取符合学生认知发展水平的教学内容

在教学内容与学生认知发展水平相适应方面，现行教科书比以前已经有了很大的进步，但是仍然从一定程度上表现出对学生发展水平限度估计不足的问题，有些问题超出了学生的实际发展水平。例如，要求初中一年级学生解决复杂化的“工程问题”、“浓度问题”、“行程问题”。因此，在安排教学内容时，教师应当注意

贯彻螺旋上升的原则，使学生对数学知识的理解有一个逐渐深入的机会；要注意到学生已经具备了哪些相应的知识，学生的认识已经获得了怎样的发展，使教学在学生已有认知发展的基础上来展开，不向学生提出他们力所不能及的问题。

3. 给学生提供操作具体事物的机会和时间

前已述及，思维发展是连续的、相互重叠的，学生在学习进程中经常要回到低水平思维中去，依靠具体经验获得对新知识的相应水平的理解。因此，教师要利用教科书提供的线索，为学生提供适当的实物、图、表等，让学生有充分的时间对具体事物进行操作，使他们获得学习新知识所需要的具体经验。

然而，目前的教学实际中，经常是在以图画表象（不是实物表象）或语言表象提出问题，让学生稍作思考后，就将问题引向概念，进而很快提出概念的语言表述并给出抽象符号。由于教学中没有给学生以充分的具体材料，并且没有给学生足够的时间来对具体材料进行实际操作，因而导致学生头脑中已有认知结构与新知识之间不能进行充分的相互作用。学生不是通过自己的思维来构成对概念的理解，而只是通过机械重复记住了教师所讲述的那些关于概念的现成解释。例如，在函数概念的教学中，教师举出一些“对应”的事例，再由教师概括出函数这种“对应”的特点，然后给出函数的定义，接着是从各种角度对函数概念进行解释，试图通过大量讲解达到使学生全面理解函数概念的目的。殊不知，在这样的教学中，学生没有时间和机会对自己头脑中已有的关于函数的具体经验进行分析、概括，理解函数所需要的具体经验还没有建立起来，函数这一特殊对应的特点不是被学生自然发现的，而是由教师灌输给学生的。在这样的教学过程中，学生的学习只能依靠机械的记忆，所获得的知识不可能是全面的、清晰的、牢固的。这里也涉及到数学教学与现实生活相互结合的问题。过去，人们通常认为，数学知识只能通过一种抽象语言、甚至是那种由数学符

号组成的特殊语言来理解，因而数学教学与现实生活的联系是困难的，或者从现实生活中引出数学问题是不必要的。但事实上，“中小学数学首先，也是最重要的，是作用于事物的动作”（皮亚杰）。所以，以现实生活中相应的事物及其关系来支持数学学习，不但是适应学生发展水平的需要，而且也是数学教学本身的性质所决定的。

另外，不同的内容（如新课、习题课、复习课等）有不同的表现形式和运动变化规律，因此，教师以学生的现有认知发展水平为依据，按照学生的认识规律和不同知识内容的发生发展规律设计好教学情境，课堂教学中放手让学生自己去独立实践和思考，则是充分发挥两个积极性，提高课堂教学质量的保证。例如，“同角三角函数的基本关系式”一节，教科书在开头提出：“根据三角函数的定义，可以讨论同角三角函数间的一些基本关系。由式子 $\sin\alpha=\frac{y}{r}$，$\cos\alpha=\frac{x}{r}$，$\tan\alpha=\frac{y}{x}$ 可以看出，当 $\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$（$k\in$ Z）时，有 $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{y}{r}\cdot\frac{r}{x}=\frac{y}{x}=\tan\alpha$。又通过 $x^2+y^2=r^2$，可以看出，$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\left(\frac{y}{r}\right)^2+\left(\frac{x}{r}\right)^2=1$。”然后再举例说明关系式在求值、三角函数恒等式证明中的应用。虽然，这样做可以非常快捷地把知识交给学生，但总让人感觉到这样做有把学生当成“知识容器”之嫌。另外，具有独立探索精神的学生也会提出疑问：怎么会想到要讨论这些基本关系的?讨论这些基本关系的必要性如何?为什么一定要根据定义来讨论?等等。显然，这些疑问是学生认识事物的内部规律时所必然会产生的，是学生从知识发生发展过程、知识之间的相互联系性去认识知识的必然产物。如果教师漠视这些思想，不设法针对这些思想进行“答疑解惑”，那么不但会失去一次极好的思想方法教育的机会，而且还会使教学变得呆板机械，降低课堂教学质量。因此，教师必须根据学生可能产生的疑问，对教

材进行重新设计。例如，教师可以结合“基本关系式”的作用来设计教学情境，安排“再发现”过程。先向学生提出问题：

已知 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，求 $\cos\alpha$，$\tan\alpha$ 的值。

这是一个不用“基本关系式”也能求解的问题，而且在没有“基本关系式”的导向时，其求解思路会更加广阔。例如，有的可能会从“先由已知求出 α 的值，再求其他的三角函数值”来考虑；有的会从“先由已知确定出 α 角的终边，再求其他三角函数值”来考虑；也有的会注意到各个三角函数值是关于 x、y 的齐次式，从而直接从定义出发，有

由已知得 $\frac{y}{r}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{4}{5}$，则 $25y^2=16x^2+16y^2$，$9y^2=16x^2$，即 $\frac{y}{x}=\pm\frac{4}{3}$，$r=\frac{5}{3}|x|$，亦即 $\cos\alpha=\pm\frac{3}{5}$，$\tan\alpha=\pm\frac{4}{3}$。

或：由 $\frac{y}{r}=\frac{4}{5}$，而 $x^2+y^2=r^2$，则 $\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}=1$，所以 $\frac{x^2}{r^2}=1-\frac{y^2}{r^2}=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\left(\frac{3}{5}\right)^2$，进而 $\frac{x}{r}=\pm\frac{3}{5}$，即 $\cos\alpha=\frac{x}{r}=\pm\frac{3}{5}$，$\tan\alpha=\frac{y}{x}=\frac{y}{r}\cdot\frac{r}{x}=\frac{4}{5}\times\left(\pm\frac{5}{3}\right)=\pm\frac{3}{4}$。

学生通过自己的亲身实践，在解题过程中可以观察到，各个三角函数之间是可以相互表示的，而且在求解过程中也会产生如何进行相互表示的具体体验。另外，通过对各种解题方法的比较，他们也会认识到，如果有了角 α 的各三角函数之间关系的一般表达式，那么像“求值”之类的问题就会变得非常容易。这些都会使接下来的基本关系式的推导变得有章可循、水到渠成。

另外，从认知心理学的观点出发，教师可以结合“先行组织者”的使用来设计教学情境。例如，教师在开始时可向学生作如下叙述：

“我们已经学了三角函数的定义。按照定义，一个角的各三角

函数值是完全由它的终边所确定的，即给定角的终边，角的各个三角函数值就唯一确定了。为了全面地认识事物，我们应该从各个侧面来考察它，这样，一个自然的问题是：给定一个角的某个三角函数值（如正弦值），这个角的终边是否也能确定？显然，如果能够确定，则这个角的其他三角函数值就可以用已知的三角函数值来表示了。这就是我们现在要学习'同角三角函数的基本关系式'的目的之一。为了讨论的方便，我们可以从具体例子的考察开始：'已知 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，试确定 α 的终边的位置。'"

由于学生在学习三角函数定义时已经有了用相似三角形来说明定义的合理性的经验，又有"三角函数线"的知识，因此这里容易想到：

如果设 $P(x, y)$ 为 α 的终边上一点，不失一般性，可令 $y=4$，$r=5$，则由象限角的概念（如图5.2.1），易知 $x=\pm3$。于是，P 点的坐标是 $(3, 4)$ 或 $(-3, 4)$，因此，角 α 的终边是可以确定的（只是有两种情况而已）。进一步的，这个角的其它三角函数值也可以确定。

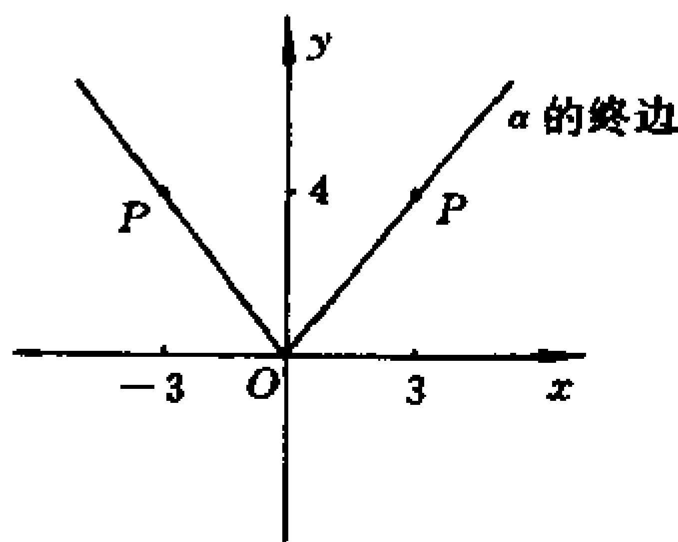


图5.2.1

那么，到底应该怎样来表示呢？我们可以把相关的函数及关系式放在一起来考察：

$$\sin\alpha=\frac{y}{r},\ \cos\alpha=\frac{x}{r},\ \tan\alpha=\frac{y}{x},\ r^2=x^2+y^2,$$

当把他们放在一起时，相互之间的关系就很容易发现了。

以上两种教学情境设计，着重于知识的发生发展过程，利用了"基本关系式"在几何或代数上的不同表现形式（变式），不但

能够使学生感到教学过程的自然亲切，教学内容不是“从天而降”，使学生对教学过程做到“心中有数”，而且，还使学生从中体验到数学研究的思想方法，学习应该从什么角度来研究问题、如何将所考察对象的内容进行逐步扩展的方法，其中包含试验、猜想、联想、类比、合情推理等，这些正是通过数学教学培养学生的独立思考能力、创造精神和探索新知识的能力以及数学观念的最好体现。值得指出的是，数学教材为我们提供的仅仅是数学知识的一种逻辑体系，但“逻辑是论题的一种属性而非精神过程的属性”，所以，教师必须对数学家发现事物在数与形方面表现出的内在顺序和规律（即逻辑性）时的精神过程——即数学家是如何进行试验、联想、类比、猜想的——进行分析，并在教学情境中“还原”这种精神过程。我们认为，作为一种固定程式的逻辑，只要用心，学生总能学会，然而，猜想，这一创造性思维中最本质的东西，由于其没有固定程式可循，因而难以被人们所普遍掌握。因此，在数学教学中“让我们教猜想吧！”。

显然，就内容的难易程度来说，“同角三角函数的基本关系式”是比较容易的，而且关系式也是非常明显的。但是，值得注意的是，学生的思维并不一定能够自然地指向“基本关系式”，即对于学生来说，他们不是做不到，而是想不到。而这正是学生数学思想方法存在缺陷的表现，或者说，这正是数学教学所应该着重做的：既使学生能做到，又使学生能想到，从而使他们的学习处于自觉的状态。而这又是照本宣科式的教学所难以实现的。

二 以学生现有思维发展水平为依据进行教学

“影响学习的唯一最重要的因素，就是学习者已经知道了什么。要探明这一点，并应据此进行教学。”（奥苏伯尔）因此，教师应该以学生现有思维发展水平为依据，选择与学生发展水平相适应的学习材料，为学生设置恰当的教学情境，使学生对新知识进

行充分的思维加工，通过新知识与已有认知结构之间的相互作用，使新知识同化（顺应）到已有认知结构中去，达到对新知识的相应理解。

1. 对学生提出恰当的要求

教师在设计课堂教学过程时，所选择的问题及安排的活动不但要适合于学生现有的思维水平，而且要考虑到促进学生的思维向下一个思维阶段发展，即既要考虑到学生思维能力水平的限制，又要考虑到思维发展的潜力。从学生的学习机制来说，如果新的学习经验与现有的思维模式一致，则出现同化学习；如果新的学习经验要求学生修正已有认知结构，则出现顺应学习。在学生实际的学习过程中，同化与顺应总是同时发挥作用，相互补充，从而引起学生理解水平的不断提高，认知结构的持续发展和完善，这就是学习与发展的根本机制。因此，教师应当根据学生的现有发展水平，运用适当的、具有新奇性和差异性的具体材料，设置教学情境，以保证学生思维模式的某种顺应的出现。例如，教师可以在教学情境中提供逐步变化的问题系列，使学生在解决下一个问题时不能仅仅沿用上一问题的解决方法，这时学生就会出现疑问：为什么已有的方法在解决前一问题时能够成功，而现在却不能成功了呢?这样就出现了理解的问题。在教学情境中出现的问题应尽可能贴近学生的实际生活，并应有意识地提供现实生活中的相关问题，以便引导学生认识所学知识的应用价值，并使他们了解实际生活，以进行有效的思想教育。

值得注意的是，在一个教学情境中，不能包含太多的要求学生修正自己的认知结构以后才能获得的知识，否则的话，或者学生意识不到问题的存在，或者被它的要求搞得不知所措。只有当教学情境中的问题的新奇性、差异性与学生现有发展水平相适应时，才能出现主动学习。这里要防止两个倾向，一是不恰当地求高求难，二是求细求全。高难问题学生无从下手，而求细求全则会造成

学生思维的混乱。例如，高一学生学习幂函数 $y=x^n$ 的性质时，要求学生将 n 取有理数时的所有情况都区分出来，试图使学生建立起一个完整的关于幂函数的性质与 n 取值之间关系的认知结构，这种要求是不恰当的。事实上，强迫学生尝试他们无力做到的事情，只能把学生的学习引向死记硬背，还会使学生因为达不到教师的要求而怀疑自己的学习能力，从而大大伤害其学习自信心，挫伤其学习积极性，久而久之会使学生厌烦数学学习，惧怕学校，形成一个不断加剧的学习失败的恶性循环。

2. 从具体材料、具体动作入手而不是从抽象语言入手进行教学

教科书为教学提供了数学语言及图画。有的教师认为，学生和教师一样，也能容易地把图画表象和抽象语言符号与现实客体联系起来，能依靠图画表象和抽象语言符号对客体的关系进行认识。这是不符合实际情况的，许多教学失败的真正原因也就在此。事实上，正如前面已经指出的，只有学生对学习对象有了丰富的具体经验以后，才能使学生对学习对象进行主动的、充分的理解，达到对知识及其关系的相应水平的认识。因此，教师应把教科书中的图画转化为具体实物，将语言转化为具体材料，通过引导学生对这些具体事物的观察、感知和理解而获得丰富的具体经验，帮助学生顺利地实现同化（或顺应）。

3. 尊重学生现有发展水平

尊重学生现有发展水平就是要承认学生学习能力上的限度，要接受学生看待问题的方式方法，要容忍学生的学习错误，并看到错误背后隐含的合理因素。事实上，学生有自己对客观事物的独特理解方式，也许，这种理解在教师看来是不全面、不合理的，有时甚至是错误的，但是对学生自己来说却是有意义的，因为学生是在他现有思维发展水平上来理解事物的，是从他自己看问题的角度来看待事物的。教师只有充分尊重学生现有的学习能力，才能

使他的教学真正促进学生的发展。错误能够提供反馈，它是构成学生学习过程的一个自然的、重要的组成部分。

另一方面，从现代认知心理学观点来看，学生的学习是以现有认知发展水平为出发点，以“最近发展区”为定向，在不断的产生错误和纠正错误的过程中进行的。学生只能在错误中学习，只有在成功与失败的亲身体验中才能真正领悟和掌握所学知识的精神实质（特别是思想方法）。因此，在数学课堂教学中，让学生在学习中经历适当的困难，使学生有通过自己的独立思考而克服困难的机会，在克服困难的过程中产生失败与成功的亲身体验，这是学生“学会学习”的根本保证。如果学生在学习过程中遇到的困难不大，缺乏在容易产生错误的情景中的亲身体验，那么，在学习过程中的这种无挫折性会掩盖知识理解上的肤浅性、片面性，这就会造成知识记忆的困难，使知识难以灵活运用（特别是难以在复杂情景下运用）。不让学生经历知识的发生发展过程，未经学生自己的独立思考就告诉学生结果（内容和表现形式），这事实上是剥夺了学生亲身体验学习过程，特别是体验成功与失败的机会，结果必然会大大降低学习的质量，影响学生理解知识的深刻程度和洞察学习错误的敏锐程度，经常造成学习上的“事后诸葛亮”（常常表现为自己苦苦思索不得要领，稍加点拨又恍然大悟）。

数学教学中，教师应当根据自己的学习经验、过去的教学经验，向学生提出能纠正错误的新问题，鼓励学生通过思考问题中所包含的材料间的某些潜在关系，来发展自己的推理能力，获得正确认识。而有些错误可以作为疑问先存于学生的记忆之中，待他们具备相应的水平时，再让他们重新学习，纠正错误。例如，在证明某一问题时，有的学生只证明了特例，显然，这是对问题的一种片面理解，这时，教师应当看到学生证明中包含的合理因素，并就学生认识不全面的地方提出新问题。

我们认为，允许学生出错，并发现错误中的合理因素，是一

件体现教师的专业素养和教育、心理理论素养的事情，不太容易做到，这不但需要教师对学生的一般思维能力发展水平有深入的了解，对学生发展的个别差异心中有数，而且还要求教师能准确判断学生对问题的各个方面的理解程度，并要有耐心和强烈的责任感。

教师必须认识到，学生的真实学习过程必然包含尝试错误、不完善的推理、对问题认识的片面性和间断性，必然要经历一个从对新知识的一无所知到知之甚少到逐渐增多的过程，这种不协调、不完全的现象是达到更高水平理解所必须的中间阶梯。承认学生发展水平的限度，尊重学生现有发展水平，就要为学生提供一个宽松自由的学习环境，创造一个使学生有心理安全感的环境，以促进学生活动的自主展开。但在实际教学过程中，往往出现这样的情况：一旦学生出错，教师不是引导学生分析错误原因，而是直接把正确解法告诉学生，然后，为了巩固这些解法，教师再以实质内容及表现形式完全相同的问题要求学生重复再现解决问题的过程。

4. 给学生充足的时间

我们知道，数学学习主要是学生对事物的数量关系和结构关系的认识，这种认识需要通过学生的自主活动才能实现。就整个学习过程来说，学生要经过三种不同水平的活动：

首先，在直觉水平上对不同材料（包括具体实物、有多种多样联系的直觉概念等）进行理解，获得对相应知识的大量感性认识。完成这一水平的活动后，学生就能比较容易地看出不同材料中所包含的共同的数量或结构方面的关系。这是一个长期而艰苦的过程，需要花费大量的时间和精力。但是这种花费是值得的（也是必须的），因为它不但使学生获得了理解相应知识所必须的基础，而且还丰富了学生的活动，从而有助于学生形成对数学的正确看法，激发学生学习数学的积极性。

其次，在联系水平上，学生用数学的语言和符号来描述和再现直觉活动时的理解。这一水平上的活动其抽象水平更高，对事物的数量及结构关系的认识更加深刻、全面，这种关系在这一水平上得到更加具体详细的表述。值得注意的是，这一水平上的活动与具体材料之间的联系仍然是十分紧密的，一定程度的抽象认识与直觉水平的理解相互交融，从低水平的抽象逐渐走向高水平的抽象。

再次，在符号水平上，学生用数学符号对相应的数量关系或结构关系进行逻辑推演，并用前两种水平上的活动来解释用符号表述的关系及其推理。这里，学生在活动过程中的身心协调、对关系的正确的逻辑推演都不是短时间所能完成的。学生在相对较长的时间内，通过自主的活动，不但在他们的发展水平上以他自己的方式探索他们所面临的问题，还为更加正规的学习方法构成了一个逻辑基础。学生花费很多时间进行探索活动，不但在学习能力、对数学的兴趣、学习数学的自信心等方面获得很大的收获和补偿，而且也使他们从中学习怎样学习，怎样发展自己，以及怎样在离开学校后继续发展，这正是素质教育所应追求的目标。

5.注意因材施教

这是一个老生常谈的问题，但是在实际的教学过程中，这一问题处理得并不理想。为什么要因材施教?主要是学生的发展存在个体差异，这种差异表现在兴趣爱好、能力、气质、性格等各个方面。尽管学生的发展呈现大致相同的阶段性，相同年龄阶段的人有大致相同的心理特点，但同中有异。教师就是要承认并且重视这种个性差异，在全面了解每一个学生的个性特点的基础上，在达到数学教学大纲规定的基础要求的前提下，对不同学生提出不同的要求，使学生能够按照自己的途径和方式，达到各自所能达到的发展水平。事实上，让每一个学生都对数学达到最喜欢的程度是不可能的。对于那些不太喜欢数学的学生，教师除了应努力设法引

起他们对数学的兴趣外，还应当实事求是地尊重学生的选择，对他们提出基本要求；而对那些特别喜欢数学的学生，则应当为他们创造更多的学习数学的机会和条件，培养他们的数学特长。在我们强调数学学习在学生心理发展中的重要性时，还应该特别注意到，数学并不是学生学习的唯一学科，因而数学也就不会成为所有学生都特别喜欢的学科。因此，在数学教学中对学生提出整齐划一的要求是不适当的。

当然，承认差异性，尊重学生的选择，并不是教师被动接受学生的选择。教师对不同发展水平的学生除了提出恰当要求外，还要采取一定的教学措施来激发学生学习数学的兴趣。例如，教师可以通过展示数学在社会发展和人的个体发展中的作用，通过循序渐进地向学生提出问题等方式，使学生经常感受学习成功的体验，从而提高学生的数学学习积极性。

第三节　对数学教学的反思

一　两个不同的教学实例

（一）平行四边形面积的教学

韦特海默在《创造性思维》一书中叙述了这样一个教学实例：

在一节“平行四边形面积”的公开课上，主讲教师设计了如下教学过程：

（1）复习长方形面积的求法。教师问：“上一节课我们学了长方形面积的求法，你们都懂了吗？”学生答：“懂了！长方形面积等于两边之积。”教师接着出了几个大小不同的长方形问题，学生很容易地解答出来了。

（2）教师画出平行四边形，并给出平行四边形的定义。

（3）教师给出平行四边形面积公式，并证明之：如图5.3.1，

过 D 引垂线 DE，得△AED，过 C 引垂线 CF，得△BFC。由于两个三角形全等，因此，平行四边形 $ABCD$ 的面积等于长方形 $EFCD$的面积。每进行一步，教师都根据已学过的定理、公式和公理，阐明相等和全等的概念。最后得证平行四边形面积公式。

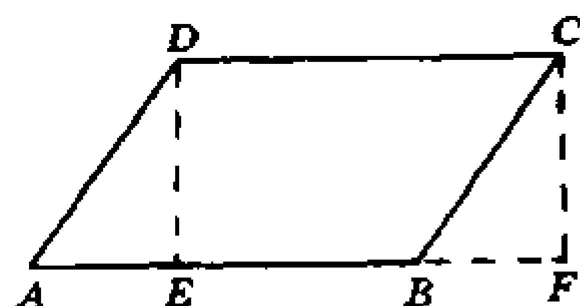


图5.3.1

（4）练习。教师举出许多大小、边长、角度各不相同的平行四边形，要求学生求出它们的面积。

为了检验自己的教学效果，教师让一个学生在黑板上演示求平行四边形面积的方法，学生准确无误。教师本人对自己的教学效果颇为自得，许多人也可能认为这节课很好，达到了教学目的。然而，韦特海默却想："学生学到了什么呢？他们思考了没有？他们掌握了要点没有？"很可能，他们所做的与盲目的重复几乎没有什么差别。为此，他向学生画了一个图（如图5.3.2），请学生求出面积。有些学生吃了一惊。有一个学生举手："我们还没有学过这个样的。"其他学生模仿老师上一节课的证明，画出了图，然后有点惶惑，不知所措。另有些学生则容光焕发，画出了辅助线（如图5.3.3），或把纸转45°，再画辅助线。

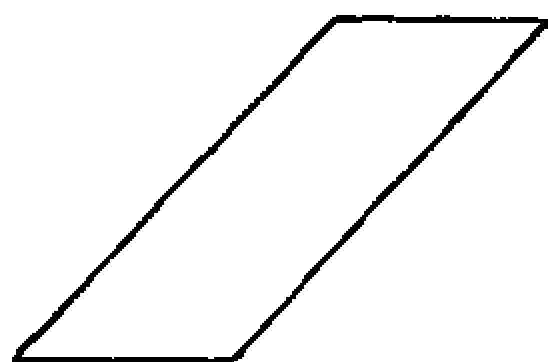


图5.3.2

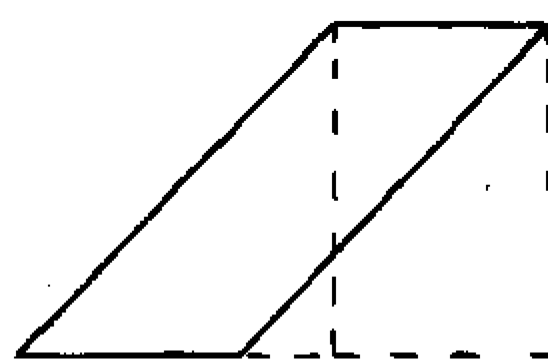


图5.3.3

显然，上述结果表明，大多数学生并没有真正理解所学内容，而是通过机械记忆和重复，记住了相应的结论和操作方法。

从上面的例子中可以看到，学生在课堂上所看到的、听到的，都不需要通过理解：全部步骤都是从天而降的；步骤的内容、方向、整个过程不是由于情境的内在要求合理地产生出来；一切看来都是随意的，对于问题的关键或本质是盲目无知的。在学生的学习过程中，没有他们自己真正的思维活动，学生体会不到他们自己的顿悟、豁然开朗的东西。一句话，他们所进行的只是对教师所教内容的表面模仿，缺乏最主要的东西，即对公式、法则的本质理解。实际上，对于长方形面积公式 $S=a\cdot b$，不能仅仅理解为“两数之积”，而应理解为（如图5.3.4）：a 代表一排中单位正方形的个数，b 代表排的数目。因而，a 与 b 在结构上和机能上都有不同的含义。事实上，长方形面积在结构上的基本特征是（以长与宽都是整数为例）：每一行的单位正方形数目都相等。心理学家指出，对这样的结构的理解程度直接决定了相关知识在后续学习中迁移的质和量。如果学生理解了这样的结构特征，那么，他在解决平行四边形甚至是梯形的面积时，就会理解教师改造平行四边形或梯形的目的，即把图形转化为一个矩形。对平行四边形或梯形结构特征的理解，是在理解长方形整体结构特征的基础上，通过学生自己对图形的操作活动而产生的一种顿悟——平行四边形与长方形在结构上的内在联系。因此，教学中应该强调学生的主体活动，强调学生通过自己的观察来领悟平行四边形的结构，理解平行四边形与长方形面积结构上的内在联系性。

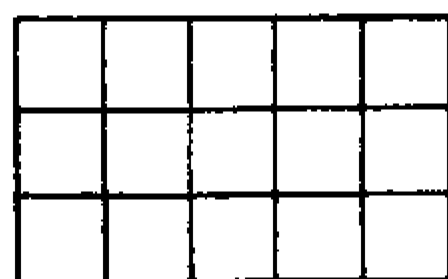


图5.3.4

（二）函数知识的教学

报纸上有这样一则消息：某林场，因为当地民众的环境和道

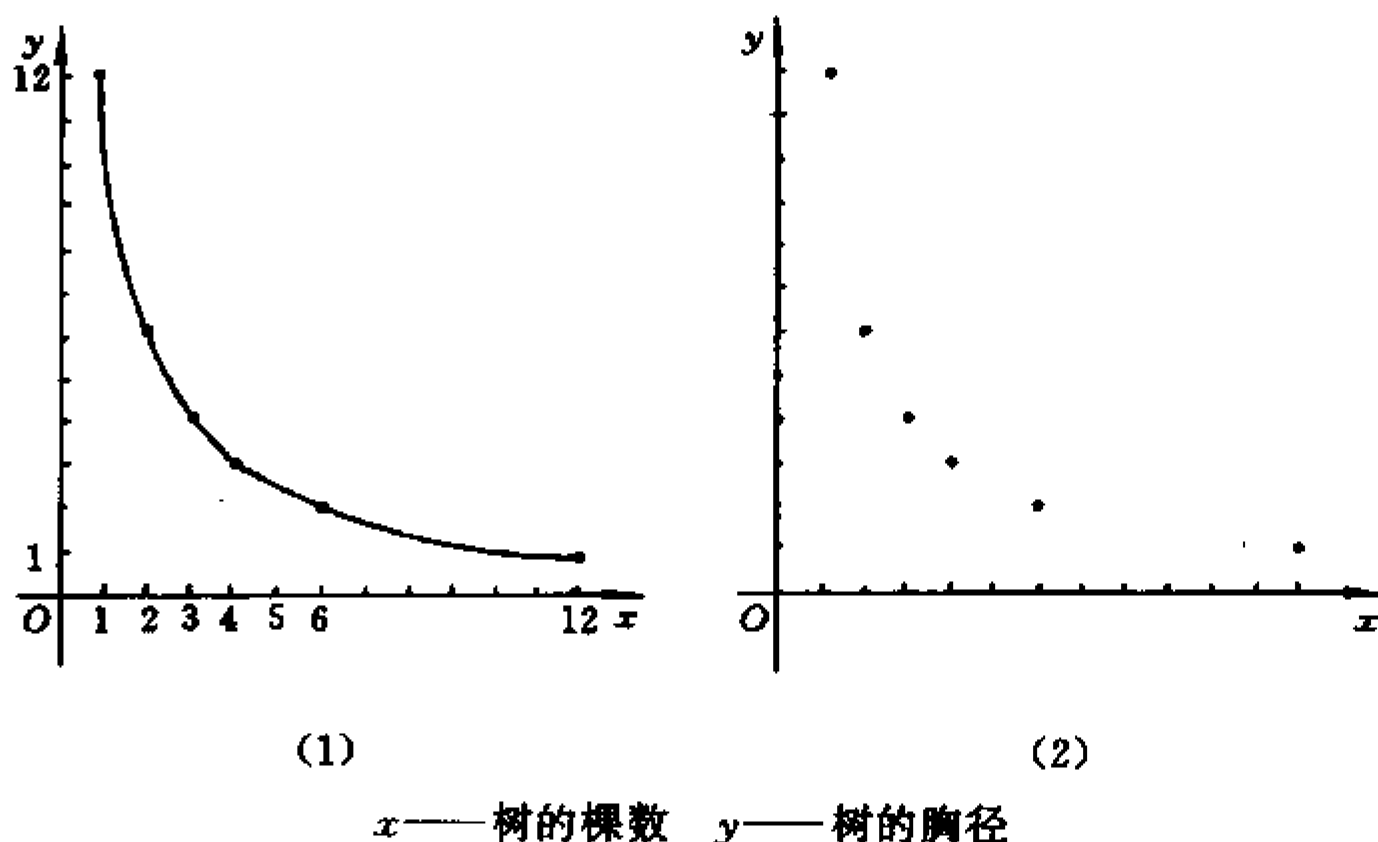
德意识比较差，成年人经常去林场偷伐树木，儿童任意毁坏幼林，致使林场损失严重。为了保护森林，提高民众的环境和道德意识，林场在当地政府的配合下，采取了一项赔偿措施：以树换树。开始，林场用的是“以一换一”的方法，即一棵比如说胸径12 cm 的树可以用一棵胸径任意大小的树来替换。后来，林场觉得这种方法不合适，就用了第二种“以一换一”方法，例如，一棵胸径为12 cm 的树可以用4棵胸径为3 cm 的树或3棵胸径为4 cm 的树来替换。现在，林场觉得这种方法也不合适，又改用第三种“以一换一”方法，即测量胸径后算出横截面面积，用作赔偿的树的相应横截面面积（或面积之和）必须与此相等。

有一位正在教函数概念的教师读到这则消息后，认为这个“树木赔偿问题”可以作为函数教学的出发点。他觉得这是一个来源于学生生活实际的问题，学生了解它，而且通过这样的问题解决过程，可以引导学生体验数学研究的真正过程，让学生感受到做数学研究其实也是一件平常的事情，使他们树立起有能力用数学来理解自己身边的新事物的自信。这位老师在给学生念了报纸上的消息以后，要求学生先考虑如何替换一棵胸径为12 cm 的树的问题，并将学生分成了若干个小组。显然，如果用作替换的树木的胸径各不相同，则问题非常复杂，于是，为简单计，老师又让学生假定用作赔偿的树木的胸径是相同的，且胸径的范围在0～12 cm。另外，老师还提出，应该把用作赔偿的树木棵树看作是其胸径的函数。接着就要求学生根据三种不同赔偿方法画出图象，并写出函数的对应法则。

在引进生活中的真实事例后，经过适当的简化处理，再要求学生去解决，这是问题解决中必不可少的一步。在此基础上画出函数图象，这对学生深入理解问题情景非常重要。因为描点的过程就是学生对函数的自变量和因变量之间如何作用的一个深入考察过程，也即是对函数性质的深入考察过程，这也为后面的“代数

化”提供了直观的、理性的基础，由此学生可以清楚地看出每一种方案对应的函数关系。“树木赔偿问题”包含了丰富的数学关系，但对学生来说，领悟这种关系需要一定时间。另外，教师必须注意，学生对问题产生的实际背景的了解和领悟是学生自己构造问题解决方法的前提。

在接下来的小组活动中，学生通过选择数据、计算坐标、描点等操作，对问题情景进行了深入的探索，然后画出了图象。在画出的图象中，有的是一条光滑的曲线（图5.3.5（1）），有的是一些点（图5.3.5（2））。学生们对各点是否应该联结起来的问题展开了激烈的讨论，讨论集中于这样的事实：用作替换的树的棵数是离散的量，而胸径的厘米数却是一个连续的变量（尽管学生没有用这些术语）。经过讨论，大家一致认为，各点不能联结起来，因为其中的一个变量是不连续的。显然，这样的讨论对于学生理解函数概念是大有好处的。



x——树的棵数 y——树的胸径

图5.3.5

在写函数表达式时，有些学生出现了困难，但经过老师指导、学生之间的交流，大多数学生最后都写出了第二种方法的函数表达式是：$n=\frac{12}{x}$，有的学生写出了第三种方法的表达式是$n=\frac{144}{x^2}$。当老师告诉学生，他们已经用到了双曲线及另外一些复杂的函数时，学生们感到非常兴奋。

接着，老师让各小组的学生进行自编习题的练习。对于像书本上类似的问题，学生基本上能够编出，但老师要求学生尽量地编写出具有挑战性的问题，并在同学之间进行交流。尽管构造一个富有挑战性的问题非常困难，但是它有利于学生对问题的理解，体会什么是问题以及问题的难易程度是由哪些因素决定的。学生对于编写问题，特别是编写所谓“好的问题”有各种各样的看法，而且在开始时他们并不习惯于编题。为了使学生有充分的时间思考，老师让学生以小组为单位先讨论几天，然后再到课堂上来讨论。几天后的数学课上，老师让学生给出讨论结果。几乎所有学生都写出了类似于“赔偿一棵胸径为12 cm 的树，用胸径为3 cm 的树比用胸径为4 cm 的树要多几棵？”这样的问题。而且，学生小组活动的结果表明，他们是极富创造力的，有的小组给出了新的替换方法，即1 cm^3换1 cm^3，他们假设，如果树的直径每增加1 cm，则树高增加1 cm 的话，按平方厘米赔偿与按立方厘米赔偿有什么不同。虽然学生的假设不符合实际，但却引起了学生进行实际调查的想法。另一个小组则希望知道，从第一种方法到第二种方法的增长与从第二种方法到第三种方法的增长之间的不同。有的小组的问题就连老师也不能解决，另有的问题似乎没有好的解决方法。当然，也有学生只能从几何上直观地理解问题，而不能用代数方法给出解答。从结果来看，学生们都乐于创造难题，希望难倒别人，而自己则努力地去解决他人提出的问题。在这个过程中，学生体会了怎样去构造一个好的数学问题，至少他们不会再对构造数学问题有太

多的神秘感。

在这样的教学中，学生还体验到了数学是如何被用来探索和解决复杂的实际问题的。他们从中看到，每一次“以一换一”的改变，都使函数关系变得复杂了，同时，林场也获得了更多的赔偿。学生不但看出了这一点，而且还用自己的方法表达出了每个关系式。当然，这个过程相对于向学生直接地给出函数的定义，再让学生通过练习而熟悉有关操作的教学过程要漫长得多，教师的劳动也更加艰苦，但是在这样的教学中，学生显然能够学得更多、更好些。因为在这样的教学中，教师的创造性确实得到了充分的发挥，主体作用得到了充分的体现，数学知识发生发展的过程性得到了更加充分的展现，学生的自主活动也开展得更加充分。

二　对数学教学的新看法

显然，上述两种教学的效果是截然不同的。长期以来，教师都在抱怨学生的数学学习能力，而学生也在潜意识中认为自己没有能力学好数学，“只有那些非常聪明的人才能学好数学”是经常能够听到的一句话。实际上，学生心目中的那个“学不好的数学”往往是指常规的计算和按规则进行操作（通常是形式证明）的数学，是需要进行大量记忆和练习的“大杂烩”。

过去，对数学教材的认识往往是：由一些基本概念按照一定的逻辑顺序组织成的知识体系。因此，学生的学习就是从最基本的概念出发，根据逻辑顺序一步步地走向复杂，就好像造房子一样，从地基开始，用一块块砖砌成墙而最后盖成。这种看法对于认清将一个复杂的问题分解成简单的、基本的问题的过程是有好处的，它提醒我们应该怎样把教学中的各种问题组织成一个相互联系的有机整体。但是，它却掩盖了学生学习的内部机制，而且也曲解了学习内容。因为人的学习并不一定是从最基础的地方开始一点点地按逻辑顺序前进的，不一定要在完全具备基础后才能进入下一阶

段的学习。学生可能在没有充分的、准确的知识准备的时候就开始新知识的学习，并且会把自己对问题的理解和已有的观念都带入学习过程。在学习过程中，随着认知活动的深入，这些不太确切的理解会变得确切起来，不太准确、不太清晰的知识准备会变得准确、清晰，这就是新旧知识相互作用的机制。在学习新知识之前要求学生掌握齐全的基础，往往会使学生陷入“见木不见林”的境地，不知道该把砖砌成怎样的墙。

我们不能简单地将作为学校课程的数学看成是按照逻辑顺序组织起来的概念、原理的集合，而应该将它看成是由类似于问题形成、猜想、检验、论证等过程组成的。这样，数学学习也就不能仅仅看成是掌握规定的程序或记住定理、公式和法则等。数学学习是“模式”的学习，包括通过观察具体事例而获得对模式的直觉概括；对不同猜想的正确性的分析、比较、讨论等；领会基本概念，并掌握概念应用的条件，等等。

数学学习并不只是接受并记住一些可以传递的信息，教学实践表明，只有学生真正建构起自己的理解时，数学学习才是富有成效的。数学建构活动既有新概念的获得，又有对已有知识的重新组织。因此，教师在教学过程中应该充分注意到已有知识对新知识学习的影响。有人对初中生在代数入门时所发生的困难进行过实验研究，发现学生在小学获得的大量算术经验的影响非常关键。例如在开始学习一元一次方程时，学生往往把等号看成是结果符号，即等号的右边一定是等号左边计算的结果。于是，学生对$3x+5=17$这样的方程或多或少有些理解，因为它的右边只有一项，是某种运算的结果，但对象$3x+5=x+17$这样的方程总觉得不好理解，他们觉得式子似乎没有写完，因为右边仍然是一种加法的形式。为了让学生明白等号是一个关系符号而不是结果符号，教师需要做很多工作。显然，教师应该重视学生从算术中建立起的经验，让学生有一个重新组织这些经验来建构对代数知识的理解的机

会。

另外，数学学习需要交流，这也就是我们曾经强调过的数学的“社会性”。学生不仅是听，而且还要有机会说，有机会讨论他们所观察到的事物，数学过程怎样得以进行，答案为什么是正确的，等等。数学发展的历史告诉我们，数学交流对于数学思想方法的产生具有非常重要的意义，但是，学完中学数学的学生往往认识不到这一点，更多的是认为数学就是加减乘除，数学就是计算、解方程、证明，等等，他们把数学看成是与自己毫无关系的历史，是早已被完成的、完全确定的形式体系。教学实践已经表明，学生头脑中的这种数学观，对于数学学习没有好处，不但导致数学情感的恶化，而且导致数学学习脱离实际生活。数学的“社会性”表明，学生在数学课堂中不仅仅学到了数学知识，而且还学到了行为方式。紧密联系实际的数学教学使学生明白了哪些东西是社会需要而必须认真学习的，知道了各种数学能力、数学语言等在他们的日常生活、交往、竞争、合作等中的意义，学会了怎样努力学习，怎样与人交往，怎样确定交流问题和交流方式等。因此，一节好的数学课，应该是在教师的组织下全体学生积极参与教学过程的课，是师生之间、学生之间进行高质量讨论而取得共识（即对所学知识的本质达成一致理解）的课，这样的课堂上，学生的思维处于高度运转状态，知识是通过学生按照自己的方式而获得的。为了领会知识，他们必须对数学课程中的各种动词，如“检验”、“表达”、“变换”、“解决”、“应用”、“证明”、“交流”等，进行亲身实践，获得切身体验。

与数学课堂教学紧密联系在一起的另一个问题是数学应用。那种最优美的数学是“纯粹的”，只有纯粹的演绎和证明体系才是真正的数学的观念已经开始动摇。计算机的高速发展加速了人们对数学的看法的改变。数学在计算机科学发展中的决定性作用不但使数学的各个领域都找到了合适的用武之地，而且也改变着数

学本身的面貌。然而这种变换并没有在数学课堂中得到反映，数学课堂仍然保持了传统，数学应用仍然没有找到它应有的位置，其原因可能是教师不熟悉所教的知识可以在哪些方面得到应用，也可能是为了升学而不愿意把宝贵的时间浪费在“数学以外”的活动上。但是，数学的实际应用对于理解数学是非常重要的。数学可以应用于经济学、物理学、工程学、生物学乃至人类的一切活动领域。通过对实际问题情景的深入理解，再构造出一个相应的数学模型，通过这个模型而反映出要解决的问题，这是数学应用的常规之路。通过这种活动，可以使学生逐渐看出所学数学知识的相互联系，这是学生获得数学学习动力的源泉。因此，教师应该注意开发、收集和创造一些实际问题情景来为教学服务，使学生有机会应用学过的那些概念和技能。这种做法可以消除传统教学中应用知识的“假象”——在学生刚刚学完某一知识以后，就给出一个“应用题”，要求学生予以解答，而所谓应用，只不过是机械的辨别、模仿和重复。例如，上面举出的“树木赔偿问题”，教师不一定要在讲完函数这个单元以后再要求学生解决，而可以从给出最初的“一棵换一棵”方案入手，让学生讨论这种方案的不合理性，并提出改进方案，思考改进后所可能带来的影响。对于所提出的方案，可以通过画出图象的方法进行检验、论证、讨论，即使有的方案目前解决不了，也可以通过画出图象而对它有些感性认识，教师说明不能解决的原因而把它留待今后解决。但是，在这样的过程中，我们的目标：找出重要的和次要的变量、构造数学模型、利用模型对有关问题进行探讨等，仍然可以实现。

与数学应用直接相关的是问题的提法。过去，我们所习惯的是“经典性”或“学院式”问题：问题的提法有固定的格式，给出的条件不多不少，问题一定可以解决，答案是唯一的，等等。显然，这样的问题与“树木赔偿问题”——所谓的开放式问题，是完全不同的。开放式的问题可以有多层次的回答，可以有多种形式的答

案，因此它能适合于大多数学生探索研究，让学生对开放式问题进行分组讨论时，教师不必担心学生不能提出问题展开讨论。在教师的帮助下领会了问题涵义的学生一般都能发现问题（尽管开始时可能比较困难），例如有的是将问题具体化，有的是对问题进行再加工，等等。总之，他们会选择问题的某一方面进行探究。如果在某一方面进行不下去，就回到问题的初始状态，寻找新的方法。对于开放式的问题，学生可能会提出一些教师所意想不到的解决思路，使教师处理起来有些棘手，但这往往更能激发学生解决问题的兴趣，这种兴趣可以引导学生深入地思考问题，使数学课堂成为一个可以进行探索和创造的场所。

更进一步的问题是，学生应该有自己构造问题的实践机会。如果学生只解决那些构造好的问题，而解决这些问题所需的知识又总是学生熟悉的，那么学生怎么能够学会处理那些数学关系不太明显的实际问题呢？为了帮助学生发展构造问题的能力，教师可以给他们提供一些没有构造好的和部分构造好的问题让学生重新叙述，并可以采取小组比赛的办法，看哪个小组构造的问题最好，给出的解答漂亮。例如，现在优惠销售商品非常普遍，有的教师就在班级学习园地出这样的构造问题：

有一位同学用4.95元人民币购买了一本童话书，并获得了7%的优惠，……

让学生解答，并要求全班同学投票选出最好的一个。学生通过小组讨论，提出了各种各样的问题。有的立即提出“这本书的原价为多少？”有的则提出“如果他付了10元，则应找回多少？”等等。被评为最好的问题是

有一位同学用4.90元人民币购买了一本童话书，该书的原价是5.30元，那么优惠率是多少？

这个小组给出的答案是：0.40元的优惠，按照计算来说优惠率是7.547%，但是实际的优惠率可能比它高或低，因此，比较合

理的答案是7％或8％。

显然，这样的回答不仅反映了学生对于比例概念的理解，能够进行恰当的计算，而且还反映了学生对社会生活实际的了解，对估算的深刻理解。这个过程中所反映出的能力是仅仅做“经典性”问题所难以培养的。让学生写出他们自己的问题及改变已有问题（即所谓的编题）是一种有效的教学策略，它可以使学生看清问题的结构，使学生积极参与到将问题转化为他们熟悉的问题的活动中来，这对于激发学生的学习热情、竞争意识都有好处，还可以使学生获得成就感。教师还可以从中了解到学生在理解问题情景时所可能遇到的困难，理解中所可能出现的问题。

过去，在教学过程中，提出问题或构造问题这个环节几乎是被忽视的，数学课本中也难得见到提出问题的情景。根据现代社会对学校教育所提出的新要求，我们认为应当重视提出问题或构造问题的作用，无论是对于发展思维能力还是发展其他能力，构造问题所起的作用都会是非常重要的。

与数学应用相关的另一个问题是要鼓励学生猜想，这是由数学的不确定性一面所决定的。过去，人们所习惯的是数学的确定性，从条件到过程和结论都是确定的，逻辑推理、证明的重要性被反复强调，一切都要按部就班，要按照推理规则行事。但是，实际生活中的事物并不都是完全确定的，相反，从整体上说事物总是处于变化之中的，不确定性是主要的，数学的发展也并不是从一开始就是确定的。从学生的认知发展来说，也有一个从简单到复杂、从单一到综合的过程，对事物的认识也是从片面到全面而发展的。因此，从一开始就要求学生进行逻辑推理、对问题作出确定的回答，这是不符合实际的。这样，在数学教学中，我们就应当更多地关注其他的一些重要的数学过程，猜想就是其中之一。当学生有机会进行数学猜想时，他们便与数学的实际过程非常接近了，与数学的实际应用紧密地联系在一起了。学生进行猜想的过程就是

一个数学研究的真实过程。可以说，数学证明对许多学生都是困难的，但作出某种猜想，并对之进行一些推理，则是每个学生都能做的。在其他学科，如语文、历史或物理、化学等，学生们逐渐学会了如何寻找证据，怎样从争论中得出结论，数学教学也应该让学生学到这些，学会提出见解并收集证据来证实它。

传统课堂所营造的气氛不利于学生进行猜测或提出猜想，学生在这样的环境中不敢也不愿意公开表述他们的想法，因为这些想法往往是“一知半解”甚至是“完全不懂”。长期的数学学习使他们形成这样的信念：数学学习中只有对和错两种状态，并且出错的机会很多。因此，为了使学生的猜想能力获得发展，教师应该努力消除学生在学习上的这些消极经验的影响，把课堂变成为一个鼓励自由猜想的场所。要让学生认识到，通过作出好的猜想，并研究它、改进它、用证据来证实它，这是学习数学的有效之道。真正的数学研究总是与猜想联系在一起的。当然，猜想不是漫无边际的遐想，对于作数学思考的人来说，猜想需要有一定的背景材料作为根据和出发点，并且要用事实来验证，随时作出修改，用更好的替代原有的。

让学生自己动手收集材料，分析数据类型，形成猜想，研究猜想的合理性，通过猜想—修正—再猜想—再修正……而获得接近于实际的某种结果，这样的直接经验有助于学生看到数学的似真性，看到数学的不确定性一面。现实中，这种例子是非常多的，体育比赛的结果、天气预报、班级里某次测验的成绩单等，这些数据资料都可以拿来作为提出某种趋势或某种相关性的猜想的资料来源。当然，分析数据所反映的内在规律，从中抽象出某种模式，这种过程可能会比较漫长，但是模式探究是数学的本义，教学中必须加以充分的重视。应该鼓励学生自己寻找证据来证实猜想，这是他们应该得到培养的数学能力之一。对于学生来说，没有根据的猜想与没有合乎逻辑规则的证明一样，是毫无价值的。如果学生通

过研究事物的某种规律而提出猜想，那么他们会很乐意寻找证据加以证明，因为这与给出书本里的某个定理的证明有完全不同的目的。对已有定理进行证明，目的是为了给出一个正规的证明过程，而证明猜想的目的主要是为了证实自己的思想。证明猜想的过程对于提高学生的论证水平非常重要，同时还能够使他们理解推理论证的真谛：推理是建立在公认的众多法则之上的。

以上我们讨论了一些数学教学的新观点。总的来说，我们强调了以启发式思想指导教学，强调了教师指导下的学生自主活动，强调学生是学习的主人，要让学生在学习过程中享受充分的思想自由。只有当学生的大脑处于自由放松状态时，他们才能更快、更有效地吸收各种信息，他们的思想才能变得活跃，思路才会变得清晰，思维才能富有创造性。在学生观上，教师应当树立每一个学生都能学好数学，都能通过自己的探索和研究来学习数学的思想观点，教师不能把他们当成学步的婴儿（即使是婴儿学步，到一定的时候也应该放手让他自己独立行走，而且他自己也会在积累一定经验的基础上要求并且坚持独立，尽管这样会带来摔交的痛苦，但这是学会行走的必由之路，他自己是乐意接受这样的痛苦和考验的），应当充分信任他们的学习能力。当然，数学教学不能没有教师，新的数学教学观下的教师并不是无所事事，事实上教师的作用更加重要了，因为适宜于学生自主活动的教学情境要靠教师来创造。前面谈到的教师收集可以应用于教学的生活实际问题、组织学生开展小组活动、让学生自己编题或构造问题、鼓励学生提出猜想、让学生自己寻找证据，等等，都需要教师有更高的教育、心理理论修养，需要教师有更强的创造性，需要教师付出更多的劳动，需要教师有更好的课堂调控技能。总之，强调学生自主活动、强调利用数学概念或理论的发展过程、通过学生自己的亲身实践获得学习数学的真实体验的教学，能够使学生的思维活动量达到“满负荷”，使学生在数学教学中的智力参与度大大提高。

第四节　数学交流

一　数学交流的意义

科学家认为，使人类区别于其他动物的主要能力之一是人际之间的交流能力，这种交流能力是人在日常交往活动中逐渐形成的。数学课堂是一个小型的数学共同体，因此它应当成为共同体成员之间交流数学思想的场所。但是，传统课堂往往成为教师表演的舞台，学生所领会的通常只是老师或课本编写者的思想观点，他们很少有表达自己思想观点的机会。这样，充当被动听讲角色的学生就没有机会发挥自己的主动性，知识掌握的效果会大打折扣，并导致能力培养的速度减缓。

在新的数学教学观指导下，教师应当为学生提供"表演"的机会，为此应懂得如何开发学生的思想和疑问，以适当的方式把它们揭露出来，以使它们成为进一步思考和加工、讨论和完善、提炼和概括的对象，促使学生的思维向纵深发展。暴露学生的思维过程可以通过说和听来实现，也可以利用写和读的过程。

数学通过交流才得以深入和发展，只有用文字和符号表达出来，数学思想才变得清晰。数学的社会性表明，数学思想只有被"数学共同体"所接受才能算是正确的，这样，一个数学理论是正确的，其意义在于这一理论得到了数学共同体的认可。当然，人们对于认可的标准还是有分歧的。例如，有人借助于计算机解决了著名的"四色定理"，但对这一证明的可接受性却有许多争论。数学是借助于数学符号语言与普通语言的结合才得以流传的。因此，数学教学中，为了对数学理论作出解释，教师必须用数学语言符号，同时学生也必须理解这些数学语言符号，于是，就存在一个数学学习共同体成员之间彼此解释各自的想法、相互理解对方的思想

的需要，这就要求学习共同体全体成员的共同积极参与。当我们给出一个与众不同的解题方法时，我们必须对其中的解题思想进行检验，这种检验的最好途径是与别人的解法进行比较。体现在数学课堂中，就是数学教学应当成为学习共同体的集体活动，数学教学就是共同体成员之间所进行的讨论交流活动。

创造一种使师生可以相互交流的课堂环境不是一件容易的事情。其原因，一部分是数学的抽象性、数学推理的逻辑严谨性使得数学交流比较困难，另一部分是学生对于交流的必要性缺乏切身体验，对交流的重要性认识不足。例如，学生常常发生这样的困惑，"这么显然的事实为什么还要证明？""既然给出的是定理，那么它就是正确的。正确的东西为什么还要费力去证明呢？""看出或画出某个命题的正确性有什么不可以？"等等。确实，对于学生来说，单纯作为一种个人练习的逻辑推理，证明的重要性并不易于被学生所认可，但在集体活动中，为了让别人接受你的思想，证明就显得至关重要了。事实上，学生要进行数学思维和数学推理，要想对某个数学问题作出证明，要想把自己的思考结果与别人进行交流，那么他就必须将自己的观点清晰地、使人信服地表达出来。数学中的思想交流使得数学证明变得重要了、有意义了。就促进学生的认知发展、心理发展来说，为了消除别人的怀疑而尽力寻找证据所作的证明，比单纯推演书本上某个"显然的"定理所作的证明的意义要大得多。学生自己独立进行某个命题的证明，虽然有时会花费很多时间，但是学生可以在自己构造一个证明方法（不是模仿别人已有的方法）的过程中学到许多东西。我们曾经反复强调，让学生自己独立思考，在纠正错误的过程中体验正确思想的真谛，是数学研究的本来面目，数学的发展道路本来就是充满曲折的，数学除了逻辑性、完美性以外，还有它的似真性、试验性的一面。另一方面，在学生获得对某个命题的证明后，应当将证明思想在学习共同体内进行交流，通过成员之间的争议、讨论，往往能带来

更进一步的、深入的修改、补充甚至是纠正，这可以使证明变得更加准确、合理和简捷。这里，我们强调口头语言表达的重要性。用口头语言明确地将思想表达出来，不仅仅是重复内部思维，显化内部思想的过程，在表达的过程中，存在着对已有思想的概括，只有通过重新概括，才能使表达具有条理性和逻辑性，才能把自己所理解的实质内容准确地叙述出来。另外，通过讲述者与听众之间的交流，可以改进那些表达得不太准确、不太系统的地方，在用更加精确的语言重新表述的过程中达到对问题及解决问题所需知识的更深刻理解。

我们认为，教师可以有许多方法组织学生进行交流，关键是教师应该培养和鼓励学生共同探索的精神。然而，传统的数学课堂中，交流的方式几乎是单向的。教师从学生简单的、重复性的回答中很难了解他们理解的情况，更难了解他们的理解过程。为此，教师应当加强与学生之间的交流与合作，给学生一定的机会，让他们能够就所学内容发表自己的看法——不仅仅是说出下一个步骤或最后的结果是什么——教师就可以从这些看法中发现学生理解的过程，理解的深刻程度，有没有独到的见解，存在的问题是什么以及存在这些问题的原因在哪里。这样，教师就可以在下一步的教学中设计出更加符合学生实际的教学情境，提出更有利于帮助学生深入思考的问题。另外，由于及时发现了学生存在的理解上的问题及其原因，并通过交流而得到了及时纠正，学生学习中的问题就不会积累下来，这样会使学习过程变得自然亲切、水到渠成，所掌握的知识也能做到因果分明、逻辑清楚、结构完整。最后，由于学生都是在自己已有认知结构基础上进行新的学习，他们对同样的知识会有不同角度的理解，课堂交流可以使师生获得同一知识的不同侧面理解的信息，显然这对于知识的全面理解是极有好处的。同时还可以使学生认识到，日常语言容易导致意义上的细微差别，而精确的数学语言则更易于区分，从而使学生认识到掌握

精确的数学语言的重要性。

二　教师向学生学习

人们的灵魂深处总有这样的观念：只有学生向老师学习，而没有老师向学生学习的道理，否则这个老师就不合格了。尽管有“孔子师项橐”的古训，但现实中老师是绝对的权威。显然，新的数学课堂教学观下，教师的“权威”角色应该改变。为了使学生在课堂上学到真正的知识，教师应当努力了解学生，而这个了解的过程就是一个向学生学习的过程。即使是让学生复述所学的内容（当然，复述不是背诵），或让学生把自己的解答写在黑板上并给同学解释解答的原理，教师也能够从中了解到学生理解问题的方式，看到他的思路、推理过程、对术语、符号和一些基本数学思想的掌握情况，这不但有利于对学生的学习情况作出诊断和评价，而且也有利于提高教师自己对学生数学学习心理过程的分析、把握能力以及教学调控能力。另外，学生中确实存在着一些教师没有想到的高明的思想方法，这是真正意义上的教师向学生学习。所以，教学过程中，教师真正发扬教学民主，诚心诚意地把自己放在与学生平等的位置，虚心地向学生学习，可以获得非常丰厚的回报。

数学教学中，教师可以创造出更多的向学生学习的机会。例如，为了捕捉到学生思维的火花，可以给出一些比较灵活的问题让学生解答，也可以作“一题多解”或“多题一解”的训练。事实上，即使是常规的问题，学生在解答时也会有不同的心理过程。例如，有人在初中代数的“列方程组解应用题”课上使用“鸡兔同笼”（50个头，120条腿）为例题，让学生分组讨论解决。教师通过巡视、参与学生的讨论，了解到学生所用的各种方法。一段时间后，他选出了几个代表，让他们将解答写在黑板上，并且对所用方法进行解释和说明。在这个问题的解答方法中，有的学生使用了代数

的，也有的使用了算术的，有的还使用了直观的：

解法1：

c=鸡的数量，r=兔的数量。

$c+r=50$，$2c+4r=120$。可得 $r=10$，$c=40$。

因此有10只兔子，40只鸡。

解法2：

先画出50个头（如图5.4.1）：

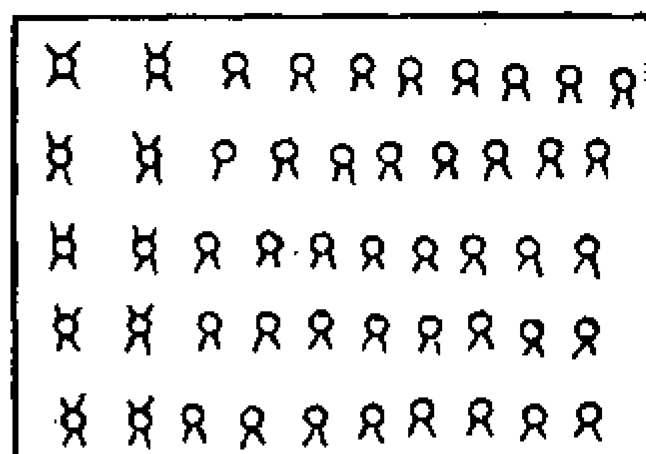


图5.4.1

如果给每只动物2条腿，则用去了100条腿。这样就剩余20条腿，把他们成对给出（没有3条腿的动物），就得到10个4条腿的，40个2条腿的。所以，有10只兔子，40只鸡。

解法3：

x=鸡的数量，$50-x$=兔的数量。

$$2x+4(50-x)=120$$
$$2x+200-4x=120$$
$$-2x=-80$$
$$x=40$$

所以，有40只鸡，10只兔子。

解法4：

鸡	兔	腿的总数
25	25	150
30	20	140
35	15	130
40	10	120

所以有40只鸡，10只兔。

显然，学生给出的解答并不一定都是教师所能够想到的。在上述解答中，教师希望学生做的是“列方程”，但事实上学生除了“列方程”以外，还给出了直观的方法、试验的方法，这些方法实际上揭示了问题的另外一些方面。正因为有了这些“意想不到”，教师才有了了解学生真实思维过程的机会。了解了学生的真实思维过程以后，教师才有可能进行有针对性的教学。

我们知道，已有认知结构是学生学习的出发点，他们总是以自己对知识的理解方式进行学习。而且，即使是新知识的学习，学生也是带着他平时对这一知识的已有理解开始的，尽管其中可能会有一些错误观念。因此教师在任何时候都有了解学生已有认知结构状况的任务。有的老师在某一单元教学开始时，采取让学生写一份作业，把他们所知道的与这一单元相关的东西都写出来的办法来了解学生的已有观念。例如，在开始“圆”这一单元的教学前，让班里每一个学生就“你对圆有哪些认识?”作出回答，发现学生的回答是多种多样的。如

“圆由许多相互联结起来的弧组成。”

“圆是没有顶点的图形。”

“圆的外部称为圆周。”

“圆是一个圈。”

“圆成360°。”

“圆的半径是其直径长度的一半。”

“圆的面积$=\pi R^2$。”

“它有两部分（内部和外部）。”

“中心即半径。”

从上述回答可以看出，学生在初中学习圆这一单元之前，经过日常生活积累以及学校中的学习已经有了许多关于它的知识，其中有些是正确的（如关于面积、半径与直径的关系等），有些是

错误的（如中心即半径之类），还有一些潜在性错误概念（如圆是没有顶点的图形）。

在了解了学生头脑中与新知识相关的有关观念的情况后，教师可以此为出发点来组织教学。例如，针对上面关于“圆”的不同回答，教师可以在课堂上逐个出示，让学生判断它们的正确性，并说明理由。由于有了前面的调查，教师对学生在哪些地方会产生错误以及哪些学生会产生错误已经心中有数，因此教学会显得更加具有针对性，对学生出现错误的诊断会更加准确，对学生的要求也会更加恰当，对学生所进行的帮助也会更加有的放矢（哪些学生需要给予什么性质的帮助）。

当然，了解学生的方法可以是多种多样的。但是，我们应当十分明确地认识到，想尽办法了解学生对于教学是非常关键的。教师应当把它看成是向学生学习的过程。因为教师可以从中了解到人认识事物的真实过程是怎样的，学生们对某一事物的普遍看法是怎样的，其中肯定会有一些一知半解或错误的观念，但正是学生的错误可以引导教师去发现使学生学会学习的契机。正是在这个意义上，我们说错误是通向成功的阶梯。

三 学生的自学

学生学会自学，关键是学会独立思考，学会对自己的思维过程进行评价。学习过程中，经常会产生一些很好的思维火花，这些思想非常有用，但转瞬即逝，如果不及时将它们记录下来，它们便留不下什么痕迹。只有当我们说出或记录下来，并进一步思考，才能使这些思想逐渐变得清晰明确，保持在脑子里，并在今后的学习中发挥作用。过去的数学教学中，数学思想经常是从书本上或教师的口中传递给学生的，学生自己的思考被教师替代了。显然，没有经过学生自己独立思考，知识不可能变成学生自己的东西，因此也就不可能被保持下来。独立思考是学生掌握数学知识的关键，

其中，反思又是领悟数学思想方法真谛的最好方法，如果能把它表达或记录下来，效果会更加显著。明确表达出来的思想观点更利于检验、修正和完善。

教学中，教师应当采取一定的措施来培养学生反思的习惯。例如，在课堂教学结束前留出一点时间让学生写出今天学到的东西和仍然不明白的地方。通过这样的措施，教师可以比较准确地了解学生的学习情况，并及时向学生澄清模糊的理解。这也给学生理清自己的思想，判断自己理解的正确性提供了机会，从而能够锻炼学生的逻辑思维。

教师可以从学生所写的东西中了解到许多关于学生掌握知识情况的信息，这些信息对于教师备课（如开始时应作怎样的回顾或提问，应该选择怎样的作业题等）、设计复习问题以及找出那些需要特别帮助的学生等都是非常有用的。另外，更加重要的是，学生通过自己对学习的总结，可以逐渐培养起对学习结果自我负责的意识，有利于培养学生自己承担学习任务的责任感。

让学生写数学学习日记是培养学生自学能力的又一个方法。学生可以记录下自己在数学学习过程中所遇到的困难、挫折和成功，可以记录下自己在找到解题方法时的兴奋或遇到某一解题思想无法实施时的苦恼。这种记录可以使学生清楚地看到自己的进步和存在的问题，一段时间后再回顾这些日记，可以引导学生对自己的数学学习进行反思，这对于使学生看清自己过去在理解中存在的问题是非常有效的。教师应该在记日记的方法上给学生作出指导，例如，让学生记录当天的想法，记录下作业过程中的感受，记录下对某个问题的整个思考过程，记录下他们对自己所给出的解题方法的评价，等等。

第五节　数学教学情境的设置

我们曾经反复说过，教师在强调学生自主活动的数学教学中的作用将变得更加重要。这种作用主要表现在对学生活动过程，即教学情境的设置上，它既要体现数学教学的目标，又要体现数学知识的发生发展过程，还要适应学生的认知发展水平，体现学生认识事物的规律。教学情境是教师教学意图的体现。通常的，数学课堂教学情境以所谓的“开放式问题”及其系列作为其表现形式。

也许有人会想，数学课堂教学情境中的“开放式问题”需要专门的材料。我们认为这是一个误解。实际上，书本上的问题，一个普通的、为人所熟悉的问题，只要教师处理得恰当，就可以转变为一个适合于提高学生思维水平，发展学生数学思维能力的“开放式问题”。

一　数学思考的机会

过去我们总是过分强调单纯接受数学教材中的现成结论。这样，学生在数学学习过程中的思维受到限制，他们自由思考的空间就比较狭窄了。但是，思维过程中具有极大的自由度是数学思维的显著特点，教师应当在数学课堂上给学生提供更多的机会，使他们能够进行“开放式”的数学思维。

“开放式”的思考需要以“开放式问题”为载体。教师将书本上的问题进行适当的改造就可以获得所谓的“开放式问题”。例如，学习了平行线性质以后，书本上有这样的题目：

如图5.5.1，如果 $AB//CD$，$BC//AD$，$\angle 1=30°$，求$\angle 2$的度数。

将这个问题改造为：

1.如图5.5.1，如果 $AB//CD$，$BC//AD$，$\angle 1=30°$，尽量多

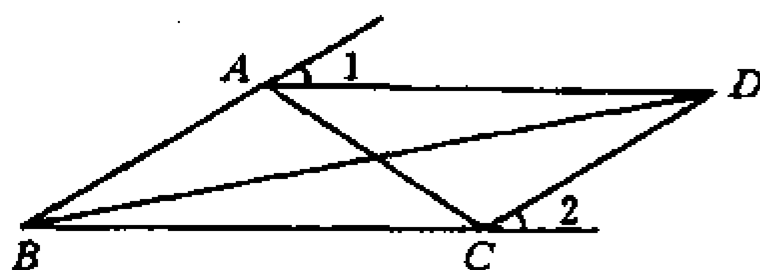


图5.5.1

地求出图中的角的度数。

2.如图5.5.1，如果 $AB /\!/ CD$ ，$BC /\!/ AD$，找出图中的等角。等等，显然，改造后的问题更加具有挑战性，学生们在做这类题目时，由于思考空间广阔，思维活动的自由度大，他们的思维活动更易于开展，思考的时间会更长，思考中的问题会提得更多，解决问题的途径也会更多、更灵活，而且在数学知识之间会建立起更加丰富的联系，且联系方式也会更加灵活。

“开放式问题”在促进学生思考，引导学生的思维向纵深发展，从而培养学生正确的数学观念上可以发挥很好的作用。例如，有的老师在平面几何课上让学生讨论这样一个问题：

一条直线穿过一个正方形，可以得到怎样的图形？

问题不难，学生很容易入手，每一个学生都可以说出几种可能的情况来。下面是一段课堂实录：

师：“请大家想象一下，一条直线穿过一个正方形，可以得到怎样的图形？这条直线可以以任何方式穿过正方形。”

接着，老师要求每一个学生都动手画图。在独立作图数分钟后，教师要求同桌的两人一起比较一下各自所画的图形，并将各种可能的图形列表。然后，再让一些学生报告他们的结果，获得了长方形、梯形、三角形等。

师：学生1，请你说说还可以得到什么图形？

生1：正方形可不可以算一个？

师：你说呢？谁能说明正方形也应该包括在内？

生2：我能说明。让直线与正方形的一条边重合就可以了，因为条件中没有说直线不能和正方形的一边重合。

师：很好。我们可以把它作为一种特殊情况。还有没有别的？

生3：如果我们用直线截出一些三角形，它们会不会是一些特殊的三角形呢？

师："特殊的三角形"指的是什么？

生3：比如，等边三角形，等腰三角形，含30°的直角三角形，等等。

师：啊，我明白了，这是一个好的问题。大家讨论一下这个问题，并举出例子。

经过讨论后，教师再让一个学生回答。

生4：我们发现不可能得到等边三角形，因为所得到的三角形中总有一个角是直角，而等边三角形中不可能有直角。

师：大家都明白了吧。其他情况呢？

生5：等腰三角形很容易得到，只要使直线穿过正方形的对角线即可。

师：这个三角形各内角的度数是多少？

生5：45°，45°，90°，这是一个等腰直角三角形。

师：很好。还有别的吗？

生6：如果将直线穿过正方形的一个角和一边的中点，那么，就可以得到一个含30°的直角三角形。

师：大家认为对吗？生6，请你在黑板上画出图形，给大家解释一下。

生6画出图形并解释：如果正方形的边长为1，那么这部分为$\frac{1}{2}$，并且有一个直角，这样就可得到一个含30°的直角三角形。

师：有问题吗，生7？

生7：我认为这样做得不到所要的三角形。因为在含30°的直角

三角形中，斜边是一个直角边的一半，而这里是一条直角边是另一条直角边的一半。

生6：他是对的，我只记住了一边是另一边的一半，而没有注意是哪两条边具有这种关系。

师：有没有人得到含30°的直角三角形?这个问题作为一个作业，大家回家做一做。还有没有别的想法?

在没有得到学生的回答后，教师提出，大家能不能考虑一下另外一种特殊情况，即全等形。还有，为了有条理地考察问题，以便获得各种可能的图形，能不能考虑一种统一的方法，例如让直线绕一个顶点运动。另外，大家是否可以对这个图形进行一些推广性的研究，看看能够获得哪些结果。

由以上教学过程可以看出，"开放式问题"确实能够引导学生深入思考，但它并不一定是难题，这与人们对"开放式问题"的一般理解是不同的。一般地，人们把"开放式问题"与难题划等号。我们认为，"开放式问题"是适应于学生的认知发展水平的，其主要功能应该是能够引起学生的猜想、讨论和争论，能够多途径寻找解题方法，学生有自己的独立思考空间。一般来说，"开放式问题"应该是一个逐渐深入的问题系列，它能够引导学生的思维深入到所学知识的内核。当然，课堂教学中使用"开放式问题"，需要耗费的时间更多，教学过程的组织也更加困难，因此需要教师精心设计，给学生留下时间和思考空间。教师应当认真听取学生的意见和见解，认真对待学生提出的各种探索性的建议和猜测，鼓励学生发表自己的各种看法，并引导学生自己去质疑、检验。即使是错误的，教师也不能直接否定，而要把它看成是学生理解问题的一个步骤，一种方式，教师应当学会探讨学生的错误对学习的价值的方法。另外，所提出的问题不能凭教师自己的想象，而应该是学生学习的"最近发展区"中的问题，应使学生感到自然亲切，同时可以使学生有进一步推广和思考的余地。

我们知道，数学在锻炼人的逻辑思维能力方面有特殊的作用，而这种锻炼是在学生的独立活动过程中获得的。教师可以为学生设计各种活动，其中，让学生提出问题，反思解题过程，推广已有命题等都是非常有效的活动。根据我们的调查，学生只会做现成的题目，以获得问题的答案为最后目标，不会自己提出问题，不懂得对问题进行推广的情况非常严重。因此，就当前的教学实际来说，培养学生提出问题的技能，推广命题的能力和习惯具有更大的现实意义。事实上，教师有许多机会来培养学生的这种能力。例如，勾股定理是人人要学的，也是大家非常熟悉的，它就可以用于训练推广能力的材料。从代数角度和几何角度都可以进行推广。在几何范围的推广，一方面，用面积来解释公式，有：以两直角边为边长的正方形面积之和等于以斜边为边长的正方形面积，这里的“正方形”可以改成为任意图形，条件是这些图形相似；另一方面，直角三角形可以向一般三角形推广，当然，推广以后三边不再保持 $a^2+b^2=c^2$ 的关系，但它们有内在联系。另外，还可以向三维空间进行推广。有老师曾在数学兴趣小组中用过这个问题，发现学生经过努力，在特例（如等边三角形、正六边形等）的引导下，能够逐渐获得，并证明一个一般性结论。

我们认为，由于数学的抽象程度高，因此数学理论的真实性并不是一目了然的，需要进行深入的分析论证，坚持反复的思考才能得到理解。这种理解要靠学生自己的领悟才能获得，而领悟又靠对思维过程的不断反思才能达到。因此，坚持让学生自己独立思考（这在开始时会比较费时），强调随时对思维过程进行反思，是提高课堂教学效果、发展学生能力的关键措施。

二　反思学习过程的习惯

培养学生对自己的学习过程进行反思的习惯，提高学生的思维自我评价水平，这是提高学习效率，培养数学能力的行之有效

的方法。解题是学好数学的必由之路，但是不同的解题指导思想会有不同的解题效果。养成对自己的解题过程进行反思的习惯是具有正确的解题思想的体现。而反思过程中的问题设计又是教学情境设置中非常重要的一个环节。

众所周知，概括是思维的基础，并且概括是有层次的、逐步深入的。数学理论的学习需要在不同层次上经历多次概括过程。只有使学生的认识从抽象上升到（理性的）具体，才能达到对数学理论的深刻认识，只有在理论的运用过程中不断对理论的实质、作用等进行反省，才能使抽象理论建立在丰富的具体背景上。如果在获得正确答案后就此终止，不对解题过程进行回顾和反思，那么解题活动就有可能停留在经验水平上，事倍功半；如果在每一次解题以后都能对自己的思路作自我评价，探讨成功的经验或失败的教训，那么学生的思维就会在更高的层次上进行再概括，并促使学生的思维进入理性认识阶段，事半功倍。

另外，由于学生的年龄特征及数学认知结构水平的限制，再加上非认知因素的影响，“应试教育”的压力，学生在数学学习中往往表现出对基础知识不求甚解，对基础训练不感兴趣，热衷于大量做题，不善于（有的是不愿意）对自己的思路进行检验，不对自己的思考过程进行反思，不会分析、评价和判断自己思考方法的优劣，也不善于找出和纠正自己的错误。学生在应用数学知识解决问题时，往往缺乏解题后对解题方法、题解中反映出的数学思想方法、特殊问题所包含的一般意义等的概括，导致获得的知识系统性弱、结构性差。

因此，为了提高数学学习效率，必须加强正确的解题思想教育，使学生养成反思的习惯。

在反思问题的设置上，教师可以从以下几个角度考虑：

1. 帮助学生整理思维过程，确定解题关键，促使思维精确化、概括化

学生解决问题时，或多或少都会带有一定的“尝试错误”，再加上缺乏对解题过程的反思，不对解题过程进行提炼和概括，为完成任务而解题，导致解题质量不高，效率低下。为提高解题质量和效率，教师应该引导学生回顾和整理解题思路，概括解题思想，使解题的过程清晰、思维条理化、精确化和概括化。例如，我们在数学课外兴趣小组中让学生证明：

已知 d_i（$i=1$，2，…，n）取0，1，2三数之一，$d_0+3d_1+\cdots+3^nd_n$ 为正整数的平方，则至少存在一个 i（$0<i<n$），使 $d_i=1$。

因为条件之间的关系并不十分明显，条件与结论之间的关系也不太明朗，问题有一定的难度，因此学生的解题过程带有很大的“尝试错误”性质。为此，在学生通过各种尝试活动，获得问题解答后，要求他们回顾解题过程，在反思过程中考虑：(1) 概括解题的关键；(2) 改进表达方法。通过学生的分析、讨论和总结，得到：解答此题的关键是建立条件之间的联系，即 d_i 取0，1，2三个数与 $d_0+3d_1+\cdots+3^nd_n$ 中的具体数字3之间的联系。稍有数论知识的人就会想到应把0，1，2看成是整数除3的余数，而由此又可联想到一个平方数除3的余数只有0或1，于是，令 $d_0+3d_1+\cdots+3^nd_n=m^2$，两边除3，左边余数为 d_0，右边余数为0或1，如果 $d_0=1$，得证；否则 $d_0=0$，这时应有 $3d_1+\cdots+3^nd_n=m^2$，所以，m 是3的倍数，从而 $d_1+3d_2+\cdots+3^{n-1}d_n$ 是3的倍数，所以 $d_1=0$，因此，$3^2d_2+\cdots+3^nd_n=m^2$，于是，$d_1+3d_2+\cdots+3^{n-2}d_n$ 为平方数。所以，当 $d_0=0$时，$d_1=0$并且 $d_2+3d_3+\cdots+3^{n-2}d_n$ 为平方数。于是，任给$2k$（$0\leqslant 2k\leqslant n$），有 $d_{2k}=1$或 $d_{2k}=0$且 $d_{2k+1}=0$。但由条件，d_i 不可能全为0，于是，至少存在一个 i（$0\leqslant i\leqslant n$），使 $d_i=1$。经过这样的概括过程，解题思路就显得自然、有条理了。但是，这一表述过程还不够简捷、概括，在寻找新的表述方法的过程中，学生发现用反证法表述最好：如果任意 $d_i\neq 1$，则由 $d_0+3d_1+\cdots+$

$3^n d_n$为正整数的平方，知其除3的余数为0或1，可得$d_0=0$且$3d_1+\cdots+3^n d_n=m^2$，这样m是3的倍数，从而$d_1+3d_2+\cdots+3^{n-1}d_n$是3的倍数，所以$d_1=0$。从而有$d_i=0$。从思维过程来说，本题是综合分析：把条件与结论综合起来进行分析，揭露它们的内在联系，从而发现解决问题的方向。

2. 结合数学基本方法，引导学生在思维策略上回顾总结，使学生掌握数学基本思想方法

在实际解题过程中，学生总是根据问题的具体情景来决定解题方法，这种方法是受具体情景制约的，如果不对它进行提炼、概括，那么它的适用范围就有局限，不易产生迁移。因此应在解题后让学生反思解题过程，分析具体方法中包含的数学基本思想方法，对具体方法进行再加工，从中提炼出应用范围广泛的一般数学思想方法。为了使解题达到举一反三的目的，在反思问题设计时，就应该考虑让学生对具体方法进行再加工，提出提炼数学思想方法的任务。

例如，学生在完成了"已知M是直角三角形ABC斜边BC的中点，通过A、M两点任意作一圆交直线AB于E，此圆的弦EF平行于BC，求证：EF为定长。"的证明以后，我们设计了如下反思过程：

首先，出示图5.5.2（1），并给出学生作业中的证明方法，要求学生判断正误，并说明理由。学生凭着已有经验，比较容易地发现了证明的不足，即图形中E点的位置为AB的中点（或F点在AC上，或AM是直径等），这只是一个特例。由此，结合"不共线三点确定一个圆"，学生认识到，命题中的圆是"运动的"，圆的运动带来了点E的运动，因此，要获得问题的正确证明，应该考虑点E的位置。通过讨论、归纳和概括，发现点E的位置可以归结为三类：（1）E与B重合；（2）E为AB的中点；（3）其他位置（有的同学提出E与A重合也是特殊位置，因为这时所作圆与AB

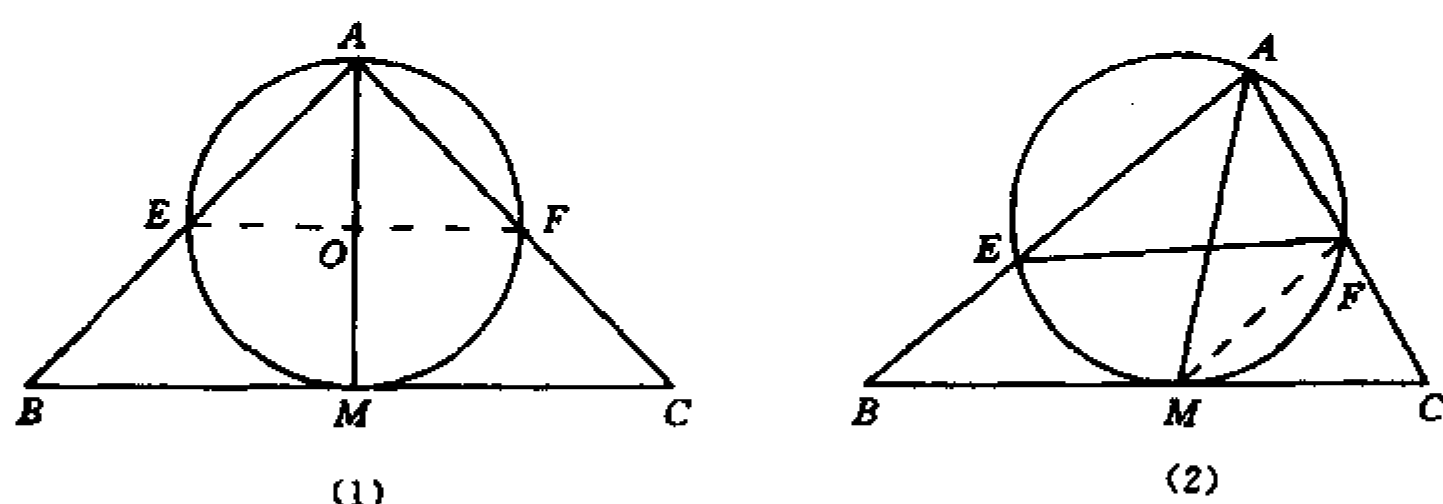


图5.5.2

相切。经过分析发现，这一位置并不特殊）。这一反思过程使学生体会了运动变化观点，学习了从特殊到一般的分析方法，还学习了“分类”思想——选择一个恰当的标准，将问题不重不漏地进行分类。

其次，为了使学生体会分类的意义和作用，我们紧接着提出：“E 与 B 重合这一位置有什么特殊作用？”学生立即发现，这时，$EF=BM$。这样，如果命题成立，那么“定值”就是 BM。也即当 E 与 B 不重合时，$EF=BM$。结合条件 EF 平行于 BM，显然有四边形 $EBMF$ 为平行四边形（如图5.5.2（2））。这里，“四边形 $EBMF$ 是平行四边形”的逻辑意义是在 $EF=BM$ 的假设下获得的，它虽然是有待证明的，但它却揭露了命题成立时的派生结果，为证明指明了方向。因此，分类有助于使要证的命题具体化，打开解题思路，分类体现了问题分析的高度理性化。这也从反面指出了学生解题质量不高的原因：思维缺乏逻辑性，解题目标不明确，始终是“尝试错误式”的，比较盲目，等等。

再次，要求学生从一般数学思想方法的角度进行归纳。通过总结，学生们发现，证明“定值”问题时，可以从特例入手，先把“定值”稳定下来，使论证有一个明确的目标，在这一目标的导向下，再对一般情形作出证明。从哲学的角度来说，一般性寓于特殊

性之中，特殊情形往往能为一般情形的论证提供重要信息。而在数学论证中，“从特殊到一般”是一种普遍适用的方法。这一总结使学生获得了一次基本数学思想方法的熏陶。

从上述过程可以看到，通过引导学生反思、总结、归纳，既使他们看到了自己思想的不全面，思维缺乏条理性，找到了差距，培养了他们的思维逻辑性，又使他们学习了解决“定值”问题的一般思想方法，还学习了如何将问题进行分类，使学生切实体验了数学思想方法对解题的指导作用，这就超出了题目本身的意义。

3. 引导学生在解题后对问题的本质进行重新剖析，在将思维由个别推向一般的过程中使问题逐渐深化，使思维的抽象程度不断提高

解决问题以后再重新剖析其实质，可使学生比较容易地抓住问题的实质，在解决一个或几个问题以后，启发学生进行联想，从中寻找它们之间的内在联系，探索一般规律，可使问题逐渐深化，还可使学生思维的抽象程度提高。例如，在学生证明了“由任一点向正三角形的三条高线作垂线，则垂线段中较长者等于其余两者之和”及“由正六边形外接圆上任意一点向六个顶点引线段，则其中两较长者之和等于其余四线段之和”以后，引导学生思考这两个问题的本质，发现它们的本质就是“由正三角形外接圆上任意一点向三个顶点引线段，则较长者等于其余两者之和”。这样就使学生对具体问题的理解更加深刻，而且还使学生体验了数学问题的结构以及解决问题时剖析其本质的意义。

又如，学生解决了“设 a，$b>0$，求证$\frac{b^2}{a}+\frac{a^2}{b}\geqslant a+b$”和“设 a，b，$c>0$，求证$\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}+\frac{a^2}{c}\geqslant a+b+c$”以后，要求学生观察它们的结构特点，探讨能否推广为一般命题。经过讨论，学生认为，从结构上看，一般命题应为“设 $x_i>0$（$i=1$，2，…，n），则$\frac{x_1^2}{x_2}+$

$\frac{x_2^2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}+\frac{x_n^2}{x_1}\geqslant x_1+x_2+\cdots+x_n$”，根据已有特例的证明思路，容易证得命题成立。进一步地，将 x_i 的次序打乱，即设 $x'_1, x'_2, \cdots, x'_n$ 是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的一个排列，证明：$\frac{x_1^2}{x'_2}+\frac{x_2^2}{x'_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x'_n}+\frac{x_n^2}{x'_1}\geqslant x_1+x_2+\cdots+x_n$。这时，只要注意到 $x_1+x_2+\cdots+x_n=x'_1+x'_2+\cdots+x'_n$，仿上面的证明即可得证。

4. 引导学生分析解题方法的优劣，优化解题过程，寻找解决问题的最佳方案

学生在解题时往往满足于做出题目，而对自己的解题方法的优劣却从来不加评价，作业中经常出现解题过程单一、思路狭窄、解法陈旧、逻辑混乱、叙述冗长、主次不分等不足，这是学生思维过程缺乏灵活性、批判性的表现，也是学生的思维创造性水平不高的表现。因此，教师必须引导学生评价自己的解题方法，努力寻找解决问题的最佳方案。通过这一评价过程，开阔学生的视野，使学生的思维逐渐朝着多开端、灵活、精细和新颖的方向发展，在对问题本质的认识不断深化过程中提高学生的概括能力，以促使学生形成一个系统性强、着眼于相互联系的数学认知结构。

例如，学生证明了“整系数多项式 $P(x)$ 在某些整数处取值1，2，3，则 $P(x)$ 至多在一个整数处的值为5。”以后，先给出学生中的一种证明：

用反证法。假设有两个整数 m，n 使 $P(m)=P(n)=5$，则由因式定理，有

$P(x)-5=(x-m)(x-n)Q(x)$。

由条件，设 a, b, c 为整数，$P(a)=1, P(b)=2, P(c)=3$。则

$$\begin{cases}-4=(a-m)(a-n)Q(a), & (1)\\ -3=(b-m)(b-n)Q(b), & (2)\\ -2=(c-m)(c-n)Q(c)。 & (3)\end{cases}$$

由(2)，由于$b-m\neq b-n$，且$b-m,b-n,Q(b)$为整数，故有

$$\begin{cases}b-m=\pm3,\\b-n=\pm1,\\Q(b)=\pm1\end{cases}\text{或}\begin{cases}b-m=\pm1,\\b-n=\pm3,\\Q(b)=\pm1\end{cases}$$

或 $$\begin{cases}b-m=\pm1,\\b-n=\pm1,\\Q(b)=\pm3。\end{cases}$$

因此有$|m-n|=2$或$|m-n|=4$。

同理，由(3)有

$$\begin{cases}c-m=\pm2,\\c-n=\pm1,\\Q(c)=\pm1\end{cases}\text{或}\begin{cases}c-m=\pm1,\\c-n=\pm2,\\Q(c)=\pm1\end{cases}$$

或 $$\begin{cases}c-m=\pm1,\\c-n=\pm1,\\Q(c)=\pm2。\end{cases}$$

因此又有$|m-n|=1$或$|m-n|=2$或$|m-n|=3$。

综上，有$|m-n|=2$。于是$c-m,c-n$一个为$+1$，另一个为-1；m,n的奇偶性相同。这样，由(1)可得$a-m,a-n$的奇偶性相同，且$a-m\neq a-n$，故

$$\begin{cases}a-m=\pm2,\\a-n=\mp2,\\Q(a)=\pm1\end{cases}\text{或}\begin{cases}a-m=\pm1,\\a-n=\mp1,\\Q(a)=\pm2。\end{cases}$$

但前一种情况得出$|m-n|=4$，舍去。于是，$a-m,a-n$一个为$+1$，一个为-1。故

$$\begin{cases}c-m=a-m,\\c-n=a-n\end{cases}\text{或}\begin{cases}c-m=a-n,\\c-n=a-m。\end{cases}$$

无论哪种情况都有$a=c$，这是不可能的，故原题成立。

上述解答过程没有什么错误，但是有许多地方值得“优化”。引导学生分析原因后发现，造成证明过程冗长的原因是没有恰当

运用有关知识，其实质是对问题的本质没有深刻理解。事实上，只要用整数的性质对问题进行分析，就可以使问题获得简捷的解答：

由（2），知 $b-m$，$b-n$ 都是奇数，因此 m，n 的奇偶性相同。于是，$c-m$，$c-n$ 的奇偶性相同，由（3）有

$$c-m=\pm 1,\ c-n=\mp 1,$$

于是，$(c-m)+(c-n)=0$，即 $2c=m+n$；同理，$a-m$，$a-n$ 的奇偶性相同，由（1）有

$$\begin{cases}a-m=\pm 2,\\ a-n=\mp 2\end{cases} \text{或} \begin{cases}a-m=\pm 1,\\ a-n=\mp 1,\end{cases}$$

无论哪种情况都有 $(a-m)+(a-n)=0$，即 $2a=m+n$。

综上，有 $a=c$，这是不可能的。

通过优化解题过程，问题的本质更加清楚了，$a-m$ 与 $a-n$，$c-m$ 与 $c-n$ 互为相反数是关键，而它们具体取什么值并不重要。

5. 帮助学生从基本概念、基础知识的角度来剖析作业错误的原因，使学生通过反思而更加深刻地理解基本概念和基础知识

学生往往在学习基础知识时不求甚解、粗心大意，满足于一知半解，这是造成作业错误的重要原因。因此，教师应当结合学生作业中出现的错误设计教学情境，给学生提供一个对基础知识、基本概念重新理解的机会，使学生在纠正作业错误的过程中掌握基础知识，理解基本概念的本质。

例如，学生在解答"已知函数 $f(x)$ 的图象与函数 $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称，求 $f(4-x^2)$ 的递增区间"时，出现了递增区间为：$(-2,2)$，$[-2,2]$，$(0,\infty)$ 等错误，其原因是学生对函数概念理解不深刻，在解题时，不考虑函数 $f(x)$ 的定义域，或对递增函数概念理解不全面。我们在教学中要求学生结合解题中的错误，重新理解函数的概念，通过分析，学生进一步认识到，涉及函数概念的问题，要十分注意它的定义域，而对函数的单调性，

则应该从两个角度来理解。增函数：函数值随自变量的增加而增加；函数值随自变量的减少而减少。减函数：函数值随自变量的增加而减少；函数值随自变量的减少而增加。在解本题时，首先应确定函数$f(x)$的定义域为$(0,\infty)$，然后确定$f(4-x^2)$的定义域为$(-2,2)$，而$f(x)$为$(0,\infty)$上的减函数，当$x\in(-2,0)$时，$4-x^2$递增，所以$f(4-x^2)$递减，而当$x\in(0,2)$时，$4-x^2$递减，所以$f(4-x^2)$递增。所以所求区间是$(0,2)$。

三 从具体到抽象

在设置教学情境时，从具体到抽象是一个基本原则。为了让学生在思考过程中有一个比较好的台阶，教师应该给学生提供对抽象概念（或观念）的实际背景进行操作的机会，这种操作是学生理解抽象概念的必须手段。教师的聪明才智、在教学过程中的作用都体现在这个操作过程的安排之中。

例如，在代数中，关于年龄问题的方程是学生颇感困难的，学生在解决类似于两个人的年龄差和年龄比是如何随着时间的变化而变化的问题时，常常觉得无从下手。为此教师就可以把问题先具体化，先让学生解决一个课本中的问题：

1999年，父亲的年龄是儿子年龄的8倍，2年后，父亲的年龄变成儿子年龄的6倍。问：父子俩1999年的年龄各是多少？

具体解答时，要求学生分组讨论来解决这个问题，并算出父与子这前后10年的年龄各是多少。尽管这个问题有一定的困难，但在合作下，学生基本上还是可以解决的。在此基础上，再要求学生计算出父子俩每年的年龄差和年龄比，然后填入下表：

年份	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
父亲	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
儿子	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
年龄差	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35
年龄比		36	18.5	12.7	9.8	8	6.8	6	5.4	4.9	4.5

在填完表格后，教师可引导学生对后面的“差”和“比”进行讨论。一般的，学生比较容易理解“差”为常数这一点，而对“比”的变化的理解却需要动点脑子。不过，从表中可以观察到，“比”是随着年龄的增加而减少的。为了使学生更加深刻地理解变化规律，教师可进一步地要求学生作出年龄差随时间变化的图象(以时间为 x 轴，年龄差为 y 轴)，并要求学生先猜测一下形状。对于初中学生来说，这个问题不算难，他们能够想象出图象是射线(如图5.5.3)。在此基础上，再给学生提出作以时间为 x 轴，年龄比为 y 轴的图象的任务。同样可要求学生在具体作图之前猜测一下图象的形状。他们经过自己的实践、相互讨论，作出了图象（如图5.5.4)，并且与前面的图象作比较，发现了它们之间的差别。

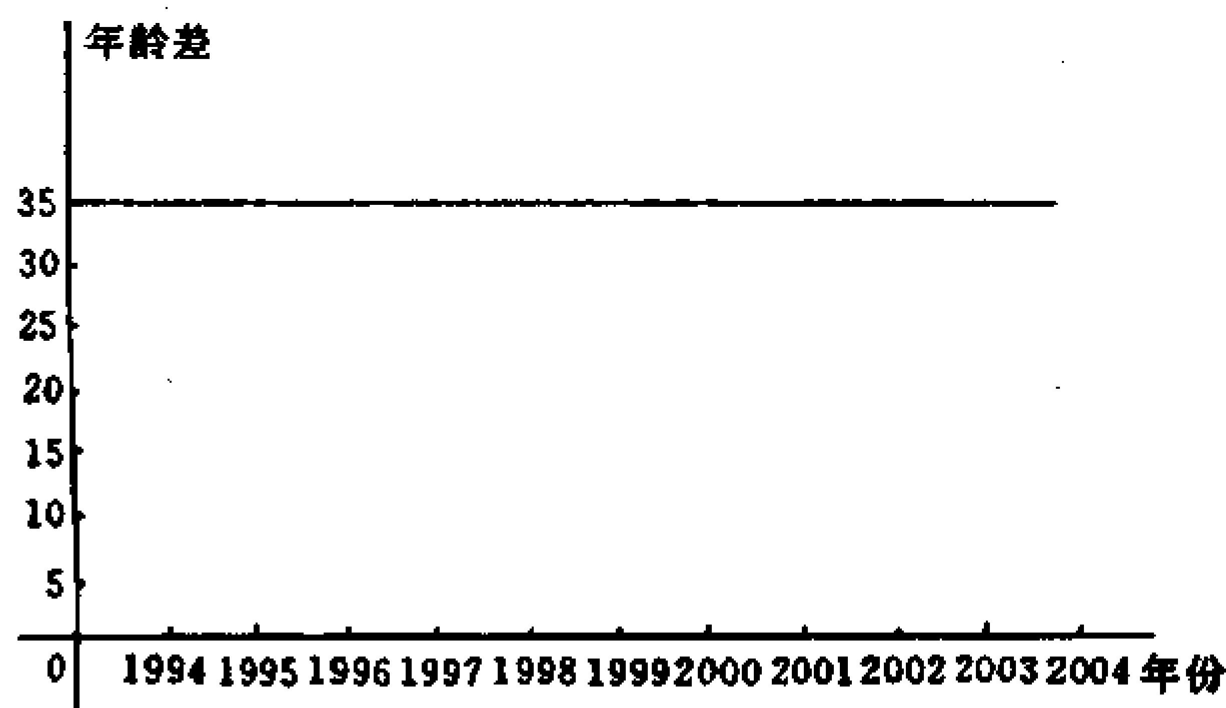


图5.5.3



图5.5.4

进一步，还可以要求学生讨论一下年龄比随时间变化的趋势，并用图象的变化趋势来验证。为了使这种变化趋势看得更加明显，可提醒学生多选几个后续年份，并用描点法作图。通过作图并与表格联系，许多学生都能看出，年龄比趋近于1，图象与平行于x轴并与x轴的距离为1的直线越来越接近。有的学生还能指出，这个比值永远不能取1，因为年龄差总是存在的。

显然，这样的教学需要比较多的时间，并且课堂组织的困难也更大。但是，如果仅从课本到课本，只要求学生解决那些已经被抽象好的数学题目，用现在流行的话来说，就是只要求学生给出抽象好的数学模型的解，而不让学生经历模型的抽象过程，这不但使学生失去了应用数学知识解决实际问题的机会，而且对能力培养也非常不利。现在，学生有机会通过从具体到抽象的数学活动，自己获得数学模型并解决之，把解决一个一般的数学课本问题变成了一次颇有价值的数学研究，这既提高了学生的学习兴趣，又使学生受到了如何进行数学研究的训练。过去，在讨论函数性质时，总是干巴巴地列出几条结论，也不知道它们到底有些什么作用。对函数性质的应用也只是让学生解决一些类似于比较大小的

问题，其过程也是从抽象到抽象，这必然使学生失去兴趣。现在，通过解决实际问题，使学生明确了讨论函数性质的必要性，看到了学习数学的作用。在探索过程中，学生认识了常数函数及其图象、单调递减函数及其变化趋势（对渐近线的直观认识），还建立了关于数学研究的一些正确观念，这些都是解决书本题目所无法做到的。

以上谈的是在新知识的学习过程中的教学情境设置问题。在复习课中同样可以设计类似的教学情境。例如，在几何复习课上，有的教师出了这样一道题目：

有一位同学打算做一个角的二等分问题。当他画好了一个角后（如图5.5.5（1）），不小心碰倒了墨水瓶子而把角涂黑了（如图5.5.5（2））。请问，他该如何利用这个图形完成作业？

当然，重新画出这个角的方法是太简单了。教师要求只能利用已有的图形，但允许同学之间进行讨论。这个问题看来并不复杂，但却能体现出十分灵活的方法，而且在解题过程中能够复习许多几何知识。有的学生在直观上立即给出了解法：将纸对折，使角的两边重合，那么，折痕就是所求的对角线。尽管这不能算是解答，但是其中包含了对称的思想。

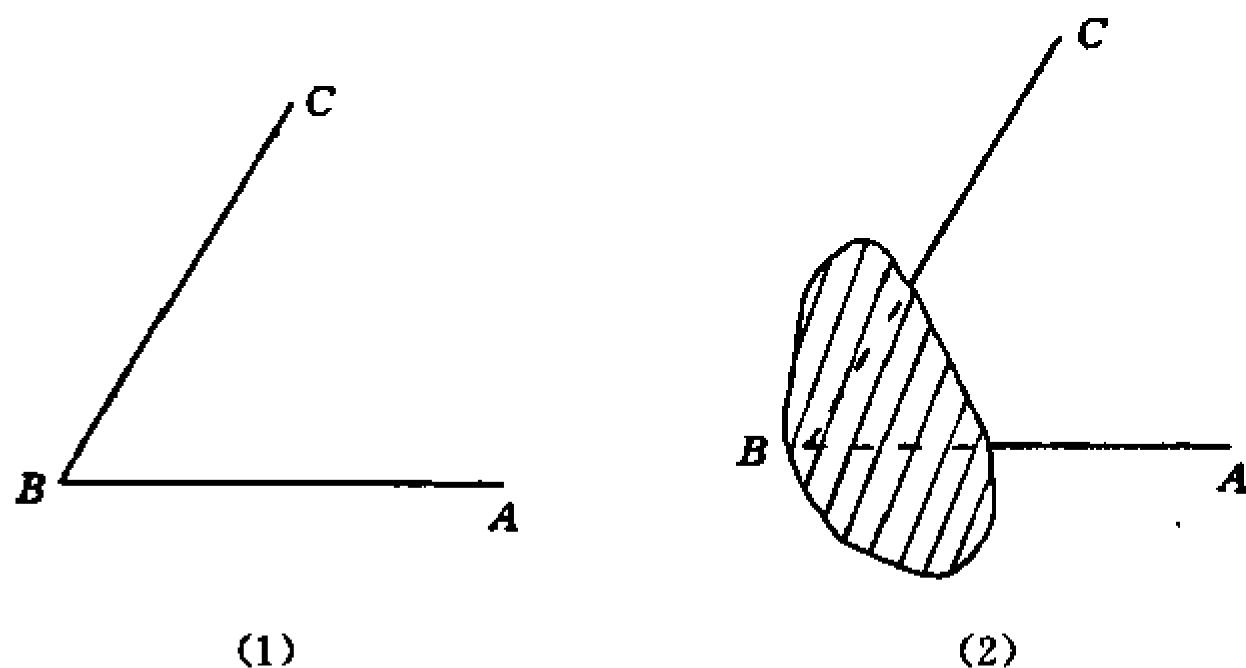


图5.5.5

解法1：

如图5.5.6，作平行于 AB 的直线 a，再作平行于 CB 的直线 b，a 与 AB，b 与 CB 的距离都是 x，设它们的交点是 D；作平行于 AB 的直线 c，再作平行于 CB 的直线 d，c 与 AB，d 与 CB 的距离都是 y，设它们的交点为 E。则点 D，E 都是角平分线上的点。联结 D，E 两点即得所求。

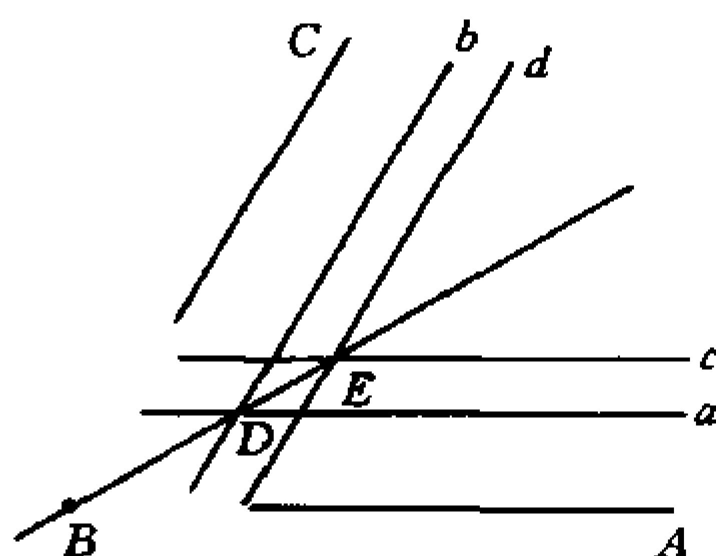


图5.5.6

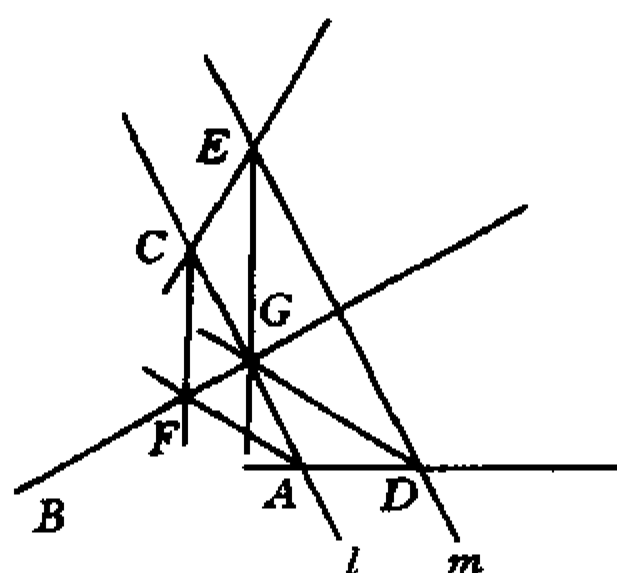


图5.5.7

解法2：

如图5.5.7，作平行线 l，m，设 l 与 AB，CB 分别交于 A，C 点；m 与 AB，CB 分别交于 D，E 点。

分别作 $\angle CAB$ 与 $\angle ACB$ 的平分线，设它们的交点为 F，则 F 点在 $\angle ABC$ 的平分线上；

分别作 $\angle EDB$ 与 $\angle DEB$ 的平分线，设它们的交点为 G，则 G 点也在 $\angle ABC$ 的平分线上。

联结点 F，G 两点，则直线 FG 即为所求。

解法3：

如图5.5.8，联结 AC。平分 $\angle A$ 和 $\angle C$，则 $\angle A$ 的平分线和 $\angle C$ 的平分线的交点 D 是 $\triangle ABC$ 的内心。

过 D 点作 $DE\perp AB$，垂足为 E 点；过 D 点作 $DF\perp CB$，垂足

为 F 点。

平分$\angle EDF$。则$\angle EDF$ 的平分线就是$\angle ABC$ 的平分线。

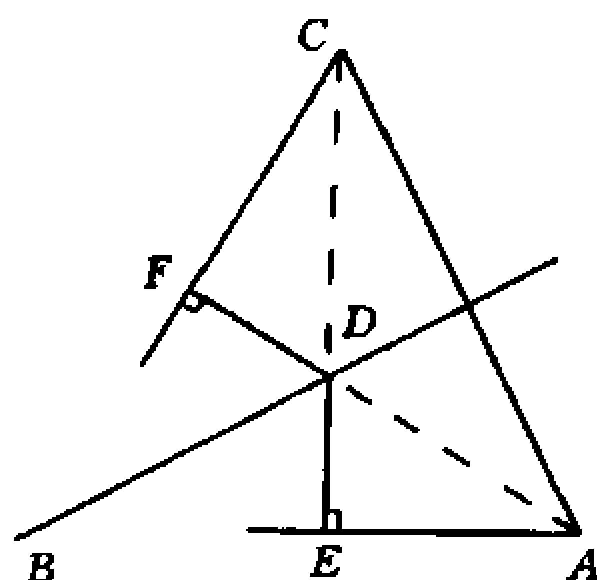


图5.5.8

在上述解题过程中，解法1是最易懂的。实际上它直接利用了角平分线的定义——角平分线是到角的两边距离相等的点的集合。先设法找到角平分线上的两个点，联结这两个点就得到所求的角平分线。分析其余解法可以发现，利用角平分线的定义是所有方法的本质，但是在给出具体方法时又有多种途径。而在解题过程中，复习了角平分线性质、三角形内角平分线共点（内心）、三角形内接圆的有关知识。事实上，在解法2中，直线 l，m 不一定要求平行，这是对三角形内心本质的更加深刻的理解和更加灵活的应用。但这里又不是简单的复习。事实上，知道角平分线不等于会用角平分线。因为所给问题具有一定的“开放性”，学生通过构造角平分线的过程，对角平分线的内涵以及与它有关的角的含义、与某两边（或直线）距离相等的点的轨迹，还有对称等其他几何观念都进行了深入的理性分析，并且还体验了几何构造的本质。

数学结论是抽象的，这种抽象结论的理解需要具体背景的支持。事实上，即使是数学家，他们在理解问题时也要借助于具体背景，借助于具体模型。在教学情境中，利用从具体到抽象的过程，给学生创造了去看、去听、去分析、去讨论和评价对某个数学结论的解释的机会，这是一个寻找令人信服的论据的过程，它比那种强化式的记忆、重复性的练习所给人的智力和能力上的训练效果要好得多。

我们认为，学生数学观念的形成是潜移默化的，它是在具体

知识的学习过程中，利用各种机会体验数学知识的发生发展过程、数学结论的获得过程后逐渐建立的。在由具体到抽象的过程中，学生获得了自己寻找证据证明数学结论的机会。学生对自己的想法进行论证、修正、再论证、再修正直至得到使自己满意的结果的过程，使他们获得了对数学论断、数学思想观念的有效性、合理性的信念，这对数学教育来说是非常重要的。我们认为，对于数学教学来说，重要的不是获得一个结论，而是在获得这个结论的过程中，学生学会了如何对自己的思想进行不断的修正，把原来不全面甚至是错误的想法逐渐转化为正确的结论。过去，教师在课堂上展现的都是一些完美无缺的最终结论，学生很少有自己的机会对数学定理、公式等进行抽象概括，久而久之，学生建立了这样的观念：数学结论总是正确的。他们认为自己要做只是接受它，并且用它来“解”或“证明”数学题。因此学生很少有机会体验到修正在数学研究中的重要性，而这实际上是数学推理的一个必要的组成部分。数学的原推理过程以及那些非常规的例子在数学的演绎结构中并不出现，发现过程的曲折性也不能在最后的结论中反映出来，但数学教科书却只是“演绎结构”，展现在学生面前的是漂亮的逻辑证明，以及由此而获得的结论。显然，这与学生的数学思维活动过程是不一致的，对培养学生正确的数学观念也是非常不利的。

我们知道，在语文的作文课上，老师鼓励学生先“打草稿”。事实上，“打草稿”的过程就是一个“构造”过程，其中包含了“修正”。老师也常常对学生说，文章是越修改越精彩。但是在数学课堂上，老师却很少要求学生“打草稿”。他们总是给学生作出逻辑推理的示范并要求学生记住并且模仿这种逻辑推理过程。从上所述，我们应该改变这种状况，给学生“打草稿”的时间和机会，让学生自己思考和修正。要把重点放在培养学生正确的数学信念上，而不是放在记忆上。必须记住，建立正确的数学信念是一个缓

慢、反复的过程，教师应该给学生以参与的机会，而不仅仅是模仿或粗略的思考。

第六节　课堂教学方法的变革
——几点具体建议

前面我们探讨了课堂教学中学生自主活动、独立思考和探索以及学习共同体中交流的重要性。但是，对于教师来说，困难的是如何才能引起学生的思考、探索和交流。在本节，我们将就此提出一些具体的建议。

过去，教师比较习惯于在课堂教学中采用讲授法进行教学，认为这样才能确保学生学会系统的数学知识，而且这样做也是符合数学本身特点的，这是因为数学具有逻辑的严谨性。另外，有的心理学家（奥苏伯尔）认为，接受学习不一定是机械的，只要教师设计合理、讲授得法，学生的学习仍然可以是有意义的，这就给讲授法教学提供了心理学依据。我们认为，这些观点都是有根据的，教学实践也证明，讲授法确实可以取得很好的教学效果。但是我们也应该看到，采取讲授法进行课堂教学，学生的数学活动形式是比较单一的，学习共同体中的数学交流也是比较困难的。因此，我们应该改变只有教师的讲授这样单一的课堂教学方法，允许学生有更多的时间进行相互合作，鼓励学生进行探索和交流。适当地组织学生进行分组活动，为他们提供一个同学之间共同切磋、相互启发、仔细思索、协作讨论数学问题的机会。当学生分组活动时，教师可以在教室里走动，参与学生的讨论，解答学生的疑难问题，激发学生深入探索的欲望。我们认为，无论采取什么样的教学方法，当学生的思维“卷入”到一个“开放式问题”中时，教师与学生之间的交流就显得非常重要了。为了获得一个更加有利于学习共同体成员相互交流的数学课堂教学情境，教师应该注意

以下一些问题。

1. 与同事讨论，以便及时获得好的建议

在适合于学生开展交流和探索活动的数学课堂教学情境中，对一个问题的讨论往往需要比较多的时间。而教师设计这一教学情境的过程也会是比较漫长的，需要发挥他的聪明才智。就像一个人开辟一项新事业一样，目标非常重要和明确，但是到达目标的旅途并不平坦。这时，如果有一个志同道合的人与他合作，那么这种“旅行”会变得更加有趣，通过相互交换意见后决定的“旅行路线”肯定会少走许多弯路。另外，教师之间的交流能够碰撞出智慧的火花，并使教师们在数学教育中形成一种伙伴关系，以共同协作进行数学教学。

2. 允许学生有一个对新的课堂教学方法的适应期

常言道，“习惯成自然”。学生在传统课堂上已经形成了一种关于如何上数学课的经验。他们已经习惯于教师先简单扼要地复习一下昨天的内容，然后讲解新课，再在黑板上演示几个例题，再做小结，最后布置家庭作业。教学过程中，教师像变魔术似地给出一个个的数学定律、法则，学生则默默地听、接受并努力地记住它们。这样的数学课上，学生很少有机会进行探索和交流。尽管学生也可能不喜欢它，但是他们熟悉它。久而久之，学生对教师产生了一种完全的“信任感”。只要教师告诉他们一些数学定律、法则，以及它们在解题中的用法，学生就会照着做。不幸的是，这种教学往往会变成一种“例行公事”，学生从中受到的是思维惰性的培养，“照猫画虎”，使内容与形式相脱离。其结果是学生可以不加思索地应用法则，同时可以完全不理会它的本质。运用法则，同时又不知道为什么要运用这个法则。当然，通过这样的教学，很少有学生能够运用所学的知识来解决一些比较复杂的问题。

改变数学课堂教学方法必然会带来学生学习方式的改变，因此学生需要一段适应的时间。不过，即使学生适应了新的教学方

法，由于现在的数学教材中内容的选择和陈述方式的问题，要组织学生开展探索和交流活动仍然有些困难。另外，要求学生掌握（记忆）的知识太多，使得教师不敢用太多的时间让学生进行探索和讨论，因为这样确实要花费更多的时间，而且效果并不是很有保证，这种顾虑在采取新的教学方法的开始阶段会更加严重一些。因此，要实行新的数学课堂教学方法，教师应该首先转变观念，还要给学生以一定的适应时间，更重要的是要选择某些重要的内容作为“试点”，改变教材的陈述方式，使它有利于学生进行探索和交流。对于重点内容，应当让学生彻底理解，这就要给予学生足够的时间和机会进行课堂讨论和进一步的研究。就探索和交流的目标来说，一次不能太多，否则的话容易导致讨论不深入。

3. 循序渐进的目标

数学教学应当有一个高的标准，这是由现代信息社会对人的数学素养的高要求所决定的。因此，教师应当鼓励学生建立适合于他自己的数学学习目标，包括较高的技能、学习数学的兴趣以及学好数学的自信心，并在达到目标的手段上给予指导。这就要求教师在教学过程中对学生提出恰当的目标。

对于教师来说，采取一种新的课堂教学方法时，最尴尬的事情恐怕是：课前设计了一个自己认为是非常精彩的教案，对教学过程进行了精心的安排，满怀信心地走进教室，期待着学生作出积极的反应，取得好的教学效果。但在课堂上，学生的情绪无精打采，对教师的启发诱导无动于衷，他们采取了不合作态度。这样的挫折所引起的后果可能是非常严重的，教师和学生可能都会由此而产生对新教学方法的失望和抵触情绪，以至于不再进行尝试。这种局面与教师的急于求成以及不恰当的教学目标有直接的关系。与全面改变传统的教学方法并期待马上获得成功比较，制定一个循序渐进的“目标链”，逐渐地实行改革是更加明智的做法。任何新的教学方法都需要一个实验过程，在教师和学生都不太熟悉的

环境中，应当有一个对新方法的探索过程。教师可以尝试一些新的做法，例如，组织讨论小组，让学生先解决一些比较容易的问题，然后再逐渐地推向全过程。在教学活动的进程中，会出现这样或那样的问题，教师应当与学生一起从中总结经验教训，并及时作出修正。如果你坚持尝试，遇到挫折时不气馁，顺利时也不得意，那么，经过一段时间后，课堂环境与气氛、学生的学习热情与技能、交流的途径与质量、学习的效果等都会有极大的改观。

我们建议，在实行课堂教学改革时，教师可以尝试在一节课中拿出5分钟，或在两周里拿出一节课，或在一个学期的课里拿出一个单元，让学生采取探索和交流的方式来学习。经过一段时间的积累，会取得一些意想不到的效果。

4. 选择合适的课题

在进行课堂教学组织形式变革的过程中，选择哪些课题作为突破口更加合适呢？这里我们对选择课题提出两个具体建议：一是选择那些长期以来感到教学效果不太理想的课题；二是选择那些具有典型意义的课题。

有教学经验的教师知道，每一个教师都有一些对自己的教和学生的学都不太满意的课题，这种课题就是我们实行改革的理想目标。既然用传统的方式教学达不到理想的效果，那么我们就应该尝试一下新的方法。首先我们可以思考一下这一课题在传统方式下为什么效果差，然后再针对这个弱点设计新的方法。

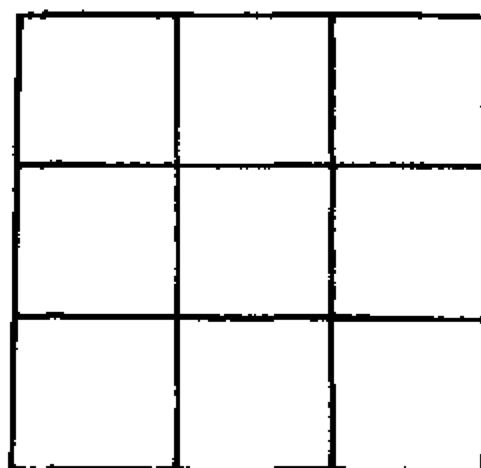
另外一种合适的课题是“典型例题”。教师可以根据自己的经验，或参考一些别人的做法（现在，许多杂志上都刊登了一些典型的教学案例，这些案例就是很好的学习榜样），再根据自己的实际情况进行“再创造”。

第七节　一个可以借鉴的例子

综合一些资料，加上我们的调查，为了表述方便，下面我们用第三人称介绍一个如何让学生开展探索、交流活动的例子。

有一位老师通过现代教育、心理理论的学习，参考了一些国内外成功的教学改革实践经验，决定在他自己的班级里进行一些课堂教学改革。在高中二年级的“数列”教学开始时，他给学生先出了这样一个问题：

将1，2，3，4，5，6，7，8，9这9个数字分别填入图5.7.1的9个方格中（此图称为三阶幻方），使每行、每列及对角线上的三个数字之和（这个和称为“魔数”）均相等。


图5.7.1

这个题目有许多学生在小学里就曾经见过，他们凭借记忆很快给出了答案，也有的学生在进行一些“尝试错误”式的解答。老师要求大家不要乱猜，应该好好想一下，要给出有说服力的解答，而且最好应该具有“一般性”。从接下来的学生表现来看，这位老师发现他的学生对老师的这种要求有些茫然。

这位老师对自己的教学设计进行反省后认为，要想让学生真正开展有效的讨论，至少应该做两个工作，一是给学生以解决问题策略上的指导，二是改变课堂组织形式。在接下来的一堂课上，他先让学生以四个人为单位作自由组合，组成讨论小组，然后他给每个学生发了一张纸条，上面写着一些关于如何解决问题的策略，如：

弄清问题　画个表格，列出已知、未知；将已知和未知用更加明确的语言表达出来；引入适当的符号；画个图；分解条件；分

解目标；等等。

拟定计划 回想过去解过的类似问题；用自己的语言重新叙述一下问题；用不同的方法重新叙述问题；回到定义去；猜一猜、试验一下；先解决一个容易的问题；先解决一个一般化问题；先解决一个特例；等等。

实施计划 检验每一个步骤；修正某些有差错的步骤；等等。

反思与推广 能否简化你的解答；能否用另一种方法解答；能否推广问题；等等。

然后，他要求学生参考上述策略来解决问题。在学生开展讨论的时候，他在教室里来回走动，和学生一起商量，回答学生的疑难问题，有时还做一些组织工作，让学生把话题集中在问题上。有时学生会提出一个解答，问老师对还是错，尽管他很想回答“对”或者“错”，但是他还是忍住了，他要求学生自己寻找证据来证明所给出的方法的正确性。

通过巡视，教师看到大部分学生都有了一定的想法。然后，他让学生上讲台讲述他们的解答及其理由。有的学生说，开始时，他们是用“凑”的办法，一个个地试，这种方法效率很低。有的是先用符号填表：

a_{11}	a_{12}	a_{13}
a_{21}	a_{22}	a_{23}
a_{31}	a_{32}	a_{33}

然后再通过解方程组：

$a_{11}+a_{12}+a_{13}=15$，　$a_{21}+a_{22}+a_{23}=15$，

$a_{31}+a_{32}+a_{33}=15$，　$a_{11}+a_{21}+a_{31}=15$，

$a_{12}+a_{22}+a_{32}=15$，　$a_{13}+a_{23}+a_{33}=15$，

$a_{11}+a_{22}+a_{33}=15$，　$a_{13}+a_{22}+a_{31}=15$，

而获得答案。显然，这种方法是比较机械的。有的是先算出每一行（列）的和应当为15，再将偶数填在对角线上（2与8，4与6各在一

条对角线上），再填其余数，至于为什么这么填写，则说不清楚。也有的说，因为要每一行、列以及对角线的和都相等，因此数字应该大小互补，即如果分组的话，应当是（1，9），（2，8），（3，7），（4，6），5，因此5应填在中间，再填别的数，等等。

从结果来看，已经有很大的进步，但还不太理想。因此，接下来，这位老师要求学生根据上面已有的方法，再结合解题策略，进一步地理清思路，改进解题方法。由于所给问题的趣味性比较强，再加上已有的解题思想，学生就有了给出更好的解答的热情和信心。在课后，情意相投的学生组成了小组对问题展开了讨论。通过比较各种思路，他们逐渐地统一了思想，在下一节课上，给出了比较一致的思路。他们认为，要解决好本题，首先应该计算“魔数”，本题的“魔数”为15，这是目标；接着应当填写中间这个位置，因为这个位置对所有其他位置都有影响，这个位置应当填5；然后再按照（1，9），（2，8），（3，7），（4，6）的顺序填写，数字1不能填在对角线上，因为对角线上的数字要影响到三组数（一行、一列和一条对角线），而“和”为15且包含1的三数组只有（1，5，9），（1，6，8）两组；只要恰当地填好一组数字，其余就非常容易填写了。在这个思考过程中，实际上用了教师所给的一些策略，如将条件具体化（“魔数”为15）；分解条件（对数字先进行组合）；先解决特殊问题（中间位置、对角线、数字1等）；等等。学生们还看到，这个问题可以有许多解法，各有特色。用方程的思想解，可以使操作过程程序化，但是过程烦琐；各个数字同等看待，理论上虽然也说得通，但实际操作时效果并不一样。还是应该先理解问题的本质，分解目标，将容易解决的“子目标”先解决了，从而也为下一个目标的解决创造条件。因此，与拿到题目，简单阅读后就开始解答相比，认真分析题意有“磨刀不误砍柴工”之功效。另外，学习一些数学思想方法、数学解题策略是非常重要的，而不同的解题策略其适用范围也是不同的。为此，教师要求学生在

解决问题时特别注意策略的运用，并要学会自己总结解题策略。为了鼓励学生，这位老师在学习园地中开辟了一个数学策略（思想方法）的专栏，发现新策略的学生可以将他的发现公布出来。

接着，老师又提出，已经解决的问题中，能否分析一下数字的特点?学生对这个问题的回答也有许多答案，如：是前9个自然数；相邻两个数的差都为1；与5“等距离”的两个数相等，等等。显然，这些都是与等差数列的定义及其性质有关的，如果掌握了等差数列的有关性质，那么在解题时会有许多方便，还比较有利于推广命题。学生虽然没有学过这些性质，但是他们凭借已有的解题经验，对它们已经有相当的认识了。“水到渠成”地，教师及时给出了等差数列的概念，并让学生根据前面的具体经验，猜想并证明了等差数列的通项公式、前 n 项和公式及某些性质。这里，特别有意义的是由数字5推广、一般化而获得的关于“等差中项”的概念，数列求和的方法。由此，教师可以回过头来让学生去推广“三阶幻方”问题。学生通过探索和交流，认为，如果9个数 a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，a_6，a_7，a_8，a_9成等差数列，那么就可以组成一个“三阶幻方”：

a_6	a_1	a_8
a_7	a_5	a_3
a_2	a_9	a_4

有人还提出，如果9个数 a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，a_6，a_7，a_8，a_9中，a_5是a_1，a_9；a_2，a_8；a_3，a_7；a_4，a_6的等差中项，那么它们也能组成“三阶幻方”。这样，任意一个数都可以作为“魔数”，而相应于这个“魔数”的“幻方”可以有无数个。但利用1，3，5，7，10，13，15，17，19不能组成“三阶幻方”这一反例，学生得知这种推广是不成立的。

在上述教学中，教师把等差数列的教学与“幻方”、“魔数”等有趣的概念结合起来，使学生对等差数列的认识建立在一种生动

的背景上，既提高学生学习的兴趣、探索和交流的欲望，又使他们在探索“幻方”规律的过程中，对数列的性质有了非常直观的理解。据此，教师再进一步地引导学生：能否从上面的探索中引出更多的等差数列性质?学生由前面的 $a_1+a_9=a_2+a_8=a_3+a_7=a_4+a_6=2a_5$，推广可得，对一般的等差数列 $\{a_n\}$，如果 $m+n=p+q$ $(m, n, p, q\in \mathrm{N})$，则 $a_m+a_n=a_p+a_q$。进一步的，将通项公式 $a_m=a_1+(m-1)d$，$a_p=a_1+(p-1)d$ 代入，有 $a_n+a_1+(m-1)d=a_p+a_1+(q-1)d$，即 $a_n-a_p=(m-q)d=(n-p)d$；由此可进一步得 $d=\frac{a_n-a_p}{n-p}$，其中 $n\neq p$。

当然，这种推广对于学生来说并不是一件轻而易举的事情，特别是对于应该从哪个角度、什么方向来推广，学生更是感到困难，而这正是需要着重加以培养的探索能力。另一方面，这种教学所需时间是比较多的，但是，在这里花费时间又是非常值得的。因为学生从中学到了许多东西，特别是培养了探索问题的兴趣、与别人交流的欲望、发现问题和解决问题的技能与能力，还有对失败的忍受能力、对解题过程的调控能力、与人交往的能力，更重要的是培养了独立思考、自我学习自我提高的能力，等等。从发展的角度来看，这样的课堂组织形式更适宜于使学生学会学习，因此，尽管开始时会费时较多，但逐渐的就能加快速度。

通过上述教学，我们可以看到，采用“开放式问题”，让学生在独立思考、积极探索和相互交流的过程中学习数学知识，无论是在知识的理解、能力的获得还是在心理的发展上，都有许多传统教学所无法比拟的优点。过去我们常常担心，“讨论式”的课堂教学比较难以控制，学生认知发展水平的限制难以保证使学生通过自已的独立探索和相互交流来掌握教学大纲中规定的数学知识，特别是数学知识的系统性将受到破坏，或者说在“讨论式”的课堂教学中难以学到系统的数学知识，另外，教学时间上也无法

保证。但是，从上面所举的例子我们可以看到，只要问题出得合适，所担心的问题还是能够得到解决的。不过，困难在于出一个与当前所学内容相适应的问题并不是一件容易的事情，教师的教学水平在很大程度上就体现在他对问题的选择上。当然，最重要的是教师要树立正确的教学思想，这样才能在教学中有意识地安排让学生进行探索和交流的活动，才能在教学过程中有意识地向学生传授思维策略，并鼓励学生自己总结和提炼思维策略。

从发展趋势来看，在数学学习（包括课内学习和课外学习）中强调主体活动、强调数学知识的过程性，在数学教学中以发展学生的个性、创造精神和创造力为主要目标，从而培养学生对未来社会的适应能力，应当成为数学教育追求的主要目标。因此，在数学课堂里引进“开放式问题”也将成为必然，它可以作为贯彻素质教育思想的一个切入口，成为培养学生的创新能力的载体。但是，对于“开放式问题”，我们还了解不多，需要大力进行研究。而且我国长期以来形成的重视数学知识的逻辑性、严谨性和体系严密性的传统，也使得我国数学教育界对“开放式问题”有一个适应期。另外，数学教育毕竟还有知识教学的任务，而对于知识的掌握来说，“封闭式问题”的作用是不能忽视的，因此，我们并不能因为“开放式问题”的优点而否定了“封闭式问题”的作用。事实上，这两者是可以互补的。

结束语

数学教育如何迎接知识经济的挑战

在国家大力提倡素质教育的大背景下，数学教育改革已经进入一个关键时期。数学教育改革受到社会各界的普遍关注，人们期待着数学教育改革的成功，对数学教育改革寄予极大的希望，原因是人们对数学在社会发展中的地位的认识提高了。人们普遍认识到：[①] 国家的繁荣昌盛关键在于高新科技和高效率的经济管理，“高新技术的基础是应用科学，而应用科学的基础是数学”，事实上，数学已经成为自然科学、社会科学和行为科学的基础，数学的内容、思想、方法在人类社会生活中已经得到广泛的应用，而数学的符号和句法、词汇和术语已经成为表述关系和模式的通用工具；数学在提高一个民族的科学和文化素质上起着非常关键的作用，她不但给人以实用的技术，而且也给人以能力，这些能力“包括直观思维、逻辑推理、精确计算以及结论的明确无误”；当今，数学已经同时具有科学与技术两种品质，这是其他学科所难以具备的。

基于对数学的上述新认识，人们对数学教育的认识也有了新的变化。人们普遍认识到：

第一，数学素养是一种文化素养。因此，数学教育应当着眼于人的文化素质教育。非智力因素是文化素养的一个重要组成部分。

① 王梓坤. 今日数学及其应用. 数学通报，1994 (7)

因此，数学教育应当重视培养学生正确的学习动机、浓厚的学习兴趣、饱满的学习热情、坚强的学习毅力和完美的个性；同时，在数学教学中又要注意发挥非智力因素的动力功能的作用，以激发学生的数学学习欲望，引导学生克服困难、坚持学习。总之，数学教学必须使掌握数学知识、发展数学能力与培养非智力因素结合起来。

第二，要强调数学教育的基础性。这与第一点是密切相关的：正因为数学教育应当使学生达到较高的数学素养，数学教育就应当使学生既掌握一定的、社会生活所必须的数学基础知识和基本技能，又形成数学地思维的习惯和能力。同时，强调基础性的另外一个意思是数学教育应当面向大多数，既为学生参加社会生产建设作好准备，又为继续升学打好基础。

第三，数学教育的“支点”是使学生达到较高的智力水平，具体落实在提高学生的思维能力上。数学的高度抽象性和严密逻辑性的特点，使数学教育在发展学生的推理能力、逻辑思维能力上具有特别重要的意义，发挥着别的学科所无法替代的作用，因此，数学教育是发展学生的推理能力和逻辑思维能力的最好途径。

第四，要加强数学的应用意识。一方面，在教材组织上，应当努力与学生的生活实际相联系，使他们能够切身感受到数学在他们生活中获得成功的决定性作用；另一方面，要教给学生应用数学知识的技能，具备牢固的数学基础知识并不等于就能进行数学的实际应用，数学应用的能力需要专门的训练和培养。当然，在基础教育阶段，数学的应用应该与学生的生活背景相结合，与学生的认知发展水平相适应，不能要求过高。在基础教育阶段，数学知识的学习仍然是主要的，数学应用教学的实质是使学生形成数学应用的意识，让学生体验数学应用的精神。应用数学知识与学习数学知识是相辅相成的，通过数学知识的应用，既能更加深刻地理解知识，又培养了应用意识。

第五，应当加强计算机教育。人类社会已经开始进入高科技时代，21世纪是信息化社会，信息科学技术是信息化社会发展的基础，而计算机技术则是信息科学技术的基础。因此，一个不懂计算机的人在信息化社会中将面临生存危机。所以，计算机教育的任务是非常迫切的，而数学教育承担这一任务是责无旁贷的。这对数学教育既是一个挑战，又是一个机遇，它能够使人们加快更新数学教育观念的步伐，促使教学内容、教学方法、教学手段的变革。

对数学教育的上述认识反映在数学课堂教学改革上，则形成了下列共识：

第一，真正确立学生在数学课堂教学中的主体地位，使学生在数学学习活动中真正享有思考的自由，给予学生独立思考的空间。自由、自主、独立是人在社会上的立身之本，也是学生获得能力的基石。

另一方面，由于数学教育是通过一定的数学知识经验的传递，使学生建立起一定的数学认知结构（数学知识、技能、能力和数学观的总和）的过程，学生是数学知识经验的接受者。因此，学生的数学学习又是接受性的。从这个意义上说，学生在数学教学过程中主体作用的发挥又是有条件的。当然，经验的接受不能像物的接受那样以消极被动的、简单的、不变形、不变质的现成形式实现，而必须经过学生自己对数学知识进行主动的重新建构才能实现。

第二，数学课堂教学要确保学生开展独立自主的数学活动，以利于培养学生的创造精神和创造力。关于这一点，主要是接受了斯托利亚尔“数学活动的教学”的思想。按照他的观点，数学活动是分层次的，而这种层次又是与学生的思维发展水平相适应的；在各种不同的层次上，数学活动又是分阶段的：（1）经验材料的数学组织化（2）数学材料的逻辑组织化（3）数学理论的应用。数学教师应当依据数学活动的层次和阶段，为学生提供适当的教学情景，使学生能够“像数学家那样自己去发现真理”。这样的教学对

教师是一个挑战，而对学生“则比死记那些不理解其来源、意义和相互联系的命题和证明的形式体系更容易些”，“如果教学不以死记已建立的体系为目的而是组织学生讨论，使他们能够重新发现这个体系的命题内容的事实，然后从逻辑上把它们整理成系统，这会更快地发展学生的思维能力，使之真正理解学习材料。”①

第三，数学教学既要教“结论”，更要教“过程”。有的人将它具体演化为数学教学的“全面性”，有的人则将其具体化为“数学方法论的教育方式”，等等。由于数学具有内容表述的“形式化”和理论发现的“经验性”的特点，因此数学教学活动就既要重视数学内容的形式化，又要重视数学发现过程的经验性。当前的数学课堂教学存在着过分强调形式化的逻辑推理及其结论，忽视数学理论的直观背景及其发生发展过程的倾向，因此，强调数学活动的过程性具有更大的现实意义。

以上我们主要从数学课堂教学角度对数学教育改革的情况进行了简单的回顾。事实上，数学教育研究正处于一个关键时期，我们大家已经感觉到了其中的许多困惑，思想也比较混乱，方向也不太明确。这与我国80年代的数学教育研究形成鲜明的对照，那时的问题清楚，方向明确，使人非常清晰地感觉到研究的进展和深入。我们认为，造成当前数学教育研究徘徊状况的原因是复杂的。在世纪之交，人类社会即将进入知识经济时代的情况下，我们应当认真思考造成徘徊的原因，理清思路、辨明方向、走出困惑，使数学教育在新的时期有一个较大的发展。

下面我们从人类社会在走向知识经济时代的过程中，对数学教育所提出的新要求的角度谈谈我们的思考。

1. 数学教育的综合化

数学教育研究本来就是多学科交叉的，它涉及到数学哲学和

---

① 斯托利亚尔 A A. 数学教育学. 北京：人民教育出版社，1985，3

数学教育哲学理论、数学课程理论、数学方法论、数学教学理论、数学学习理论、数学教育评价理论及数学教育技术手段等。在人类社会由工业经济向知识经济发展的过渡时期，人们的思想、观念，对事物的理解和认识等都会发生很大的变化。由于数学向其他学科的渗透以及数学在人类社会生活中的广泛应用，使人们对数学的认识产生了极大的变化，这种变化必然要对数学教育提出新的要求，给数学教育带来新的变革。众所周知，在本世纪70年代之前，科学和技术是两个概念，“科学”是对客观规律的系统探索和认识，它有两个产物：知识和技术。知识的创新叫“发现”，技术的创新叫“发明”。80年代前后，一批具有科学和技术融合特性的新技术的出现，使科学与技术之间不再界限分明，这种新技术被称为“高科技”。按照联合国组织的分类，“高科技”主要有：信息科学技术、生命科学技术、新能源与可再生能源科学技术、新材料科学技术、空间科学技术、海洋科学技术、有益于环境的高新科学技术、管理科学技术。这种分类不再以探索系统知识为标准，而是以追求效用为标准。相应的，数学教育就应该适应这种分类标准的变化，把包括自然科学、社会科学、人文科学、行为科学等在内的多学科综合研究作为今后的研究方式。

相应于数学教育研究的综合化，必然导致数学教育研究分支的多极化，除了上面已经提到的分支以外，至少目前的人文、社会、教育、心理等学科的各种分支都可以在数学这一特定的学科环境内进行特别的研究，从而获得相应的数学教育研究分支，例如，数学社会学、数学社会心理学、数学教学艺术论、数学教育研究方法论、数学比较教育学、数学文化论、数学文献学、数学评估学、等。我们认为，研究分支的多极化决不是那种“数学＋教育学”之类的指责所能否认的。重要的是要处理好一般与特殊的关系，要深入透彻地理解数学哲学、社会学、教育学、心理学等学科的基本思想和一般原理，在这些基本思想和原理的指导下，去

揭示数学教育的特殊性。那种只强调特殊性而排斥一般性以及只讲一般性而忽视特殊性的观点都是错误的。我们认为，在数学教育研究中，对教育、心理的一般理论学习是非常重要的。目前数学教育界仍然处于理论学习阶段。在学习过程中出现这样那样的问题和不足是难免的，这是一个经验积累的过程，理论与实践相互渗透、融合的过程。因为出现问题和不足就否定教育学、心理学等一般理论的作用，这是一种不科学的态度。实践是重要的，但是没有理论指导而只有实践，数学教育研究是要失去方向的。数学教育从本质上说属教育科学，没有一般教育理论指导的数学教育理论与实践是要付出沉重代价的。

"多极化"所带来的一个必然结果是研究队伍的"多元化"，也就是数学教育研究需要各种学科研究人员的共同参与，要发挥"多元积极性"。就目前的情况来说，这种需要可以具体化为：数学教育需要全社会的关注，而数学教育工作者则应该听取来自社会各界的意见和建议。这里我们仅就数学家、数学教育理论研究工作者和数学教师进行数学教育研究的问题谈谈看法。

我们认为，关心数学教育的数学家、数学教育理论工作者和数学教师是数学教育研究的主体。他们在数学教育研究中各有长处，可以承担不同的责任。

首先，数学教育需要数学家的关注和参与。因为数学家对数学的本质、数学的思想方法以及数学研究的要旨有着非常切身的经验和体会，由于有了这样的实践经验作基础，因而他们对数学学科内在规律的认识比其他群体深刻，他们对数学的理解深度、对数学发展趋势把握的准确程度、对数学研究所需要具备的基础的深切体验，都是其他群体所不具备的。如果数学家在获得了数学创造以后，能够对自己的创造过程进行反思，对自己的思维过程作出真实的回忆，剖析其中的成败原因，并提炼出一定的数学思想方法，进而再从数学哲学的高度对这些数学思想方法的本质、数

学研究的一般规律性直致数学的本质等进行探索，那么，他们对数学教育的贡献将会更大、更直接。在这方面，王梓坤先生的《今日数学及其应用》是一个典范，徐利治先生的数学方法论研究也值得称道。我们认为，数学家对数学教育的研究是前瞻性的、战略性的。他们的经验十分宝贵，这种经验反馈到数学教育中，对于应该让学生学习怎样的数学知识、培养学生哪些数学能力、学生应该怎样学习数学、教师应该怎样教数学、应该怎样评价一个人的数学能力等都会有重要的参考价值。但是这种经验不能直接用到数学教学中去，原因是数学家研究数学的主客观条件与学生学习数学的主客观条件是完全不同的。事实上，数学家对数学的那种感觉是经过长期的数学研究实践后才形成的，他们对事物中的数学关系的知觉是经过专门训练的，具有“职业特点”。更具体地说，数学家是具备良好的数学直觉，高超地掌握了数学思想方法和从数学角度解决问题的手段的群体，他们研究数学的目的是获得数学上的发明创造。而学生并不具备数学家的“职业特点”，他们学习数学的目的正是要在掌握一定的数学基础知识的过程中形成这些数学直觉和知觉能力、数学思想方法、用数学解决问题的能力等。所以，学生学习数学与数学家研究数学的条件、目的等都是不同的。因此，除了数学家的经验、他们对数学的理解（特别是从哲学高度上的理解）外，还需要有对数学学习和数学教学内在规律的研究。

其次，数学教师是数学教育的具体实施者。他们对数学教学及学生数学学习的内在规律有着直接体验，这种经验是数学教育理论研究的重要基础，对其进行理性分析和抽象概括，可以获得符合数学教学实际的理论成果，这样的理论成果对数学教学的指导意义是非常巨大的。我们认为，在知识经济即将到来的新世纪，对数学教师的要求会有很大的变化，数学教师到底应该具备哪些素质才能适应这种变化是一个大的课题。总的来说，“教书匠”将不

再能适应社会需要，数学教师必须既具有较高数学理论修养，精通数学教材和教学大纲，又有较高的数学哲学、数学教育学、数学学习论等方面的知识，能够准确把握数学课堂教学的客观规律和学生的数学学习心理，能够洞察学生学习过程中出现的各种问题的内部原因，同时又掌握了数学教学方法，面对各种数学教学内容及不同类别的学生，都能做到应付自如、游刃有余。另外，数学教师必须有对教育事业的热爱和强烈的事业心。我们认为，数学教师增强教育科学研究的意识，树立"教科研"是教学质量的生命线的思想，结合自己的工作，积极投身于"教科研"，是迅速提高数学教师素质的捷径。

数学教育实践必须有数学教育理论的指导，因此，数学教育理论工作者的地位是不可替代的。他们对数学教育和教学的本质、学生数学学习的内在规律、教师的素质和教学能力、学生的素质和数学学习能力、数学能力的实质、数学教材的科学化和现代化、数学教学质量评估的科学化等所进行的研究探索，是数学教学质量的根本保证。就目前的状况来看，数学教育理论如何能够更加贴近于数学教学实际，使数学教育理论指导数学教学实践具有更强的可操作性，是需要更加迫切地解决的问题。从科学研究发展的历史来看，过去对基础研究、应用研究和开发研究的划分是界限分明的，而且它们一般都很难由同一个人或同一组人来完成。然而，本世纪70年代以来，从基础研究到产品开发的转化时间大大缩短(5年左右时间)，而且科技成果转化为产品以后的经济效益非常巨大，这就促使那些原来畏难于或不屑于搞产品开发的基础理论研究者自己去做成果转化的工作。由于他们对自己创造的理论的本质了如指掌，因此他们在产品开发中的优势也非常明显：常常可以跨过应用研究而直接进入开发研究，有时，原来目的性不明确的基础研究在进行过程中会被发现有应用价值，于是转化为应用研究以至产品开发。我们认为，基础研究的这种变化是值得数学教

育理论工作者深思的：在数学教育理论研究中应当增强"应用意识"和"产品开发意识"，使我们的研究成果能够尽快地转化为可以提高数学教学质量和效率的教学方法。在数学教育研究中，基础研究是非常重要的，理论基础厚实才会有"应用研究"和"开发研究"的后劲。不过，懂得大道理而不会应用于教学实际的教条主义者也是大有人在的，为了避免这种情况，数学教育理论研究者深入教学实际（最好能够自己去从事具体的教学工作），用实践来验证理论或从实践中发现问题，形成课题，是一条比较可行的办法。

总之，数学教育研究的综合化趋势需要发挥各类群体的积极性，同时，这种趋势又为研究人员开辟了广阔的研究领域。任何一个人都可以利用自己的智力资源"有所为，有所不为"地进行研究，占据数学教育研究的一席之地。

2. 数学教育观念的开放性

知识经济的到来必然带来数学教育观念和教学指导思想的转变，这种转变可在下列几个方面集中体现出来。

（1）数学教育目标的开放性

具有挑战性的数学教育可以为学生提供用其他方法无法获得的机会。为了使学生在大大复杂化的全球经济环境中参与竞争和取得成果，作为一种准备，他们对数学的学习必须达到某种高标准的水平，必须把数学作为阅读、自然科学、历史、人文科学等信息社会中必备的基础知识的中心。[1] 因此，在数学教育目标的研究和制定中，应当考虑如何为学生进入社会参与竞争、寻找和抓住机会打下坚实的基础，如何适应社会发展对数学教育提出的新要求，为促进我们社会长期经济增长服务。总的来说，数学教育目

① ［美］Riley R W. 数学教育的现状：为21世纪建立强大基础，数学译林，1998（3）

标包含四种成分：数学知识、社会需要、智力以及情感与态度，从发展的角度看，有向后三种成分转移的趋势。在知识经济时代，教育的核心是培养人才的创造性思维和创新能力，数学教育目标应该充分反映这种时代的要求，把培养学生的创造性思维和创造精神作为核心目标。而在当前的工业经济向知识经济过渡时期，又要使我们的教育目标在一个比较科学的统一要求下具有动态性、灵活性，有人认为，可以把"帮助学生学会数学地思维"作为数学教育的主要目标（徐利治等）。另外，作为一个对实际的数学教学具有明确指导意义的数学教育目标，又必须是具体化的，而具体化的关键是建立数学教学的指标体系，即通过数学教学应该使学生在数学的知识、技能、能力以及思想品德方面达到怎样的标准。美国数学教师全国委员会就曾经于1989年提出了数学教育的四个社会目标（具有良好数学素养的劳动者、终身学习的能力、平等的教育、明智的选民）和五个具体目标（学会认识数学的价值、对自己的数学能力具有信心、具有数学地解决问题的能力、学会数学地交流、学会数学地推理）。我国目前的数学教学实践中，对数学认知技能和能力方面的目标比较强调，而对人格特征、情感意志和社会人际适应方面的目标有些忽视。因此，我国当前以及今后一段时期内的数学教育应该建立怎样的社会目标和具体目标，这是一个需要研究的问题。

（2）数学课程的开放性

我们认为，当前的数学教育，关于课程、教学和学生学习的理论研究仍然是主要的，其中许多问题仍然没有认识清楚，而且许多理论成果在实际数学教学中并没有得到真正应用。就目前的研究来说，热点是课程研究：到底应该教哪些数学、怎样来组织这些数学？

"数学教育改革一直集中在数学课程的改革上"。使得我们的数学课程既反映社会发展的要求，又适应学生发展的需要，这是

一个永恒的课题。前已指出，知识经济社会对人的数学知识和数学能力都提出了高标准，那么，这种高标准到底应该从哪些方面来体现呢?或者说，有哪些重要的数学思想是知识经济时代的合格公民所必须知道并且理解的?显然，不同群体对数学的需要是各不相同的，但是又确实存在着一些人人都必须具备的数学知识和数学思想。例如，今后在微积分、离散数学、概率与统计等方面的需要将会更加突出，因此其中的一些基础知识和基本思想是大家所共同需要的；而对于算术、代数、几何等“传统内容”，将会对所有人都提出一些新的要求，例如，对于算术，心算和估算将会更加受到重视，因为心算和估算对于培养学生的全面把握问题情景、洞察事物本质的能力，准确理解数据特点、合理选择算法、正确判断运算结果的合理性的能力，等等，都有其独到的作用；而对于应用法则进行精确计算，则会更加强调对算理的深刻理解、对算法的选择和构造，以及对算法合理性的反思等，以使学生养成从事智力活动的习惯：计划自己的工作、寻找和选择完成工作的合理途径、对结果进行批判和评价。而对于代数和几何，则会更加强调数形结合思想的培养。我们认为，不局限于死的数学知识的数学课程必然是具有开放性的。在达到一个共同的基本标准的前提下，会给学生以较大的自由选择空间。就目前的数学课程来说，由于种种原因，在给教师和学生自由选择的机会方面还需要加强。现在提倡素质教育，要减轻学生的课业负担，于是就在数学内容的缩减上下功夫，这实际上是缩小了选择范围，限制了选择的自由。但内容的减少并没有真正带来学生负担的减轻，从某种意义上来说还加重了。其原因就是在选择面窄的情况下，就向深度方面发展，导致学生认知发展水平跟不上，造成在横向上的准备不足，即在相应的发展水平上没有成熟时就要求学生向纵深学习，其结果自然就导致学生的机械学习，这时所可以采取的教学方法也只有“题海战术”——让学生进行机械的重复性训练。应注意的是任何一项

初等数学中都有可以难倒大数学家的题目。在学校教育阶段，学生可以学习的数学知识的总量是相对稳定的，如果对内容挖掘过深，则必然影响内容的广度，而且这种“深”必然是超越学生认知发展水平的。因此，为了使数学课程具有一定的弹性，需要对学生生活和社会发展所需要的数学内容的深度进行研究，使其适应于学生的认知发展水平，同时又增加教师与学生的选择自由度。只在内容多少上打圈圈是不能解决问题的。

开放的数学课程将不仅是一个数学知识的逻辑体系，更重要的是要通过知识反映出它所包含的数学思想方法，反映出它的文化价值。从这个意义上来说，数学课程应该是学生获取数学知识和应用数学知识的范例，通过学习数学课程，使学生能够体验到数学思想方法的真谛，使他们学会数学地思维，同时在学生世界观的培养上也能起到很好的作用。例如，对于数的概念以自然数——整数——有理数——实数——复数的顺序扩展，如果仅从数学的角度来说，这是数系的扩张，运算范围的扩大。通过这种数系的扩张，使学生处理问题的自由度增大。然而，从另一个角度来说，这也是人的思维方式的变化，是人看问题的眼界的开拓，也就是人的世界观的转变——一个人看问题的眼界实际上是他的世界观。因此应该意识到，通过数系扩张的教育，我们不但可以使学生在数学运算上的自由度不断增大，而且可以使学生体验到事物比较系统的扩张，看问题的视野不断开阔，思想方法获得更新，从而使学生在面临新的环境条件时能够及时地以新观点来看待问题、以新方法来处理问题。值得注意的是，这种看问题方式（世界观）的转变是数学教育的最高境界，它表明了一个数学教育工作者的数学教育意识层次。当然，现实中，这种意识是极其薄弱的，就事论事，不挖掘数学知识体系的思想内涵，不注意以数学知识为工具对现实世界进行解释，也不对学生熟悉的现实世界的数学本质进行抽象，更不用说有意识地对学生从世界观的角度进行教育培

养了。因此，为了使数学教育的这种功能得到充分发挥，我们应当对数学课程进行重新认识，这样，如何使数学在转变学生世界观方面的作用在数学课程中得到充分反映，就是一个值得研究的问题。

（3）课堂教学的开放性

课堂教学的开放性是建立在对教学过程本质的科学认识基础上的。过去，人们把课堂教学过程简括为“特殊的认识活动”，有人认为，这是一种把课堂教学从整体的生命活动中抽象、隔离的认识，“它既忽视了作为独立个体，处于不同状态的教师与学生，在课堂教学过程中的多种需要和潜在能力，又忽视了作为共同活动体的师生群体，在课堂教学活动中多边多重、多种形式的交互作用和创造能力，这是忽视课堂教学过程中人的因素之突出表现。它使课堂教学变得机械、沉闷和程式化，缺乏生气与乐趣，缺乏对智慧的挑战和对好奇心的刺激，使师生的生命力在课堂中得不到充分发挥，进而使教学本身也成为导致学生厌学、教师厌教的因素，连传统课堂教学视为最主要的认识性任务也不可能得到完全和有效的实现。”① 对课堂教学的新认识是一种从生命的高度用动态生成的观点，它把课堂教学理解成既能够体现社会价值、促进学生发展的价值，又能够体现教师的生命价值的活动：不只是对学生成长所作出的纯粹付出，也是教师自身生命价值和自身发展的体现。只有充分认识到这一点，才能从根本上解决教师的教学积极性问题。在课堂教学目标上，则强调了认识目标与情感目标并重的思想，以使课堂教学实现完整的人的教育，这样，在研究课堂教学时，就既要注意数学知识体系的内在联系性，向学生揭示数学知识的发生发展过程，使学生在知识的发生发展过程中学习数学，又要注意学生生命活动诸方面的内在联系、相互协调和整

---

① 叶澜．让课堂焕发出生命活力．教育研究，1997（9）

体发展，使学生在获得认识发展的同时，情感也获得发展。这是课堂教学开放性的集中体现，是一个值得下大力进行研究的问题。

课堂教学开放性的观点，会促使我们对影响课堂教学的因素进行重新认识。总的来说，影响课堂教学的因素可以分为物质因素和心理因素，其中心理因素是通过一段时间的教育、教学实践后形成的，形成后即成为稳定状态，它对课堂教学的影响是非常巨大的，不仅影响到学生在课堂上认知活动的状态和质量，而且影响到他们的处世态度和方式、整体的情绪状态、情感体验、意志行为等；同样，教师的教学也受到心理因素的影响，他的心理状态将影响到他对学生的态度、对学生反应的敏感程度、教学民主、教学机智以及对教学成败的情感体验等。显然，这些都是具有自己独立存在形态的，有自己的作用方式和独立意义。但是在实践中，由于心理因素对教学的影响是无形的，因此往往不被教师和学生所意识到。所以，在今后的数学课堂教学研究中，分清影响课堂教学的各种因素，提出努力形成积极因素、转化消极因素的措施，使课堂教学本身具有生成新因素的能力，是一个需要重视的课题。

值得强调的是，数学课堂教学的开放性必然要求学生有独立自主的数学活动，而且这种活动是在“数学学习共同体”中进行的，不是纯粹的学生个体行为。这主要是基于数学活动论的立场和对数学的社会性的认识。[①]

数学活动论认为，数学是人类的一种创造性活动，它是一个包含了问题、方法和语言等多种成分的复合体，通过系统化而使数学的概念、原理以及结论等之间建立相互联系，形成一定的理论体系。因此，在数学学习中，不仅要掌握具体的概念和结论，而且要以联系的观点对数学理论进行整体分析，并掌握有关的问题、

---

① 徐利治，等.现代数学教育工作者值得重视的几个概念，数学通报，1995(9)

方法和语言。这里我们要强调的是活动的全面性，也即要把数学学习活动看成是问题的发现、寻找问题解决的方法、结论的获得、语言的表述，以及对上述活动过程的反思、对解决问题的方法和语言表述的优化和问题的推广等所组成的一个整体。就当前的数学教学实际来说，仍然普遍地存在着只重视寻找对现成问题的解决方法（将问题进行归类、对解题方法进行归类），忽视用准确、合理的语言进行表述的训练，而对活动过程进行反思、对语言表述和解题方法的优化以及对问题进行推广的意义，许多教师都没有真正意识到。实际上，获得问题的一个解答结果与对问题解答过程进行反思、优化、推广的差别，就如同一个人偶然钓到几条鱼和通过这样的偶然机会去研究鱼的生活习性，并概括出什么时候可以在什么地方更容易钓到鱼的差别一样。一个人对解决问题的体验是有时效性的，如果不及时进行总结，这种体验就会消退，从而也就失去了宝贵的思想方法的训练机会，从经验上升到规律、从感性上升到理性的机会，这是教学上的一种最大浪费。对活动的全过程进行调节与控制，这是一个活动主体对自己活动过程的自我意识问题，用心理学语言来说就是“元认知”问题，学会了对自己的思维活动进行反思和有效的自我调节，是思维成熟的标志。而数学思维是主体的建构活动，它的直接的研究对象是具有较高抽象程度的数学概念、命题、问题和方法等，数学活动的高度抽象性为数学的自由创造提供了现实的可能性，而对活动过程的自我意识就越显得重要——活动的自由度越大，对活动过程的监控和调节就越重要。因此，如何使学生在学习过程中增强自我意识，实现对自己的数学活动的主动监控，是一个具有深远意义的课题，值得大力研究。

数学的社会性是指存在一个“数学共同体”，这个“共同体”对数学研究有一种无形的共同规范，数学家必须承认这种规范，他的研究工作才能获得共同体的接受而成为数学的组成成分。受这

种观点的启发，我们认为，学生的数学活动也是一种群体行为，他们是作为“学习共同体”的一员进行自己的学习活动的，而教师与学生都是这个“共同体”中的成员。只有共同体中的全体成员积极参与、相互作用，激发和调动每个人的经验、意向和创造力，实现“优势互补”，才能使数学学习富有成效。这样，对于教师来说，他应该注意到自己是学习共同体中的一员，真正树立教学民主意识，为学生提供一个宽松自由的、使学生有心理安全感的学习环境，以促进学生自主活动的展开；对于学生来说，就应该充分调动自己已有的知识经验，在开展独立自主的思维活动、自己理解相应知识的基础上，积极主动地与教师、同学开展交流，以实现对数学知识的多层次、多侧面的理解。从这个意义上来说，学生的学习是一个主动性和他动性相结合的过程。这样，在分析学生学习过程时，只讲主动性而抹杀他动性就是片面的。

显然，在课堂教学的开放性观点下，我们的学生观、教学观都应该有相应的变化，对于“教师的作用是什么”、“教师的作用应该如何发挥”、“什么样的教学方法是适当的”、“学生的哪些学习行为是适当的”等问题都应该进行重新认识，有待我们进行深入研究。

(4) 使用数学 CAI

知识经济时代是信息化社会，而计算机则是处理信息的主要工具，在数学课堂中引进计算机是时代发展的必然。我国中小学计算机教育六年纲要规定，在2000年以前，中小学计算机配备最低标准(高中25台、初中20台)的达标率是城市高中100%，初中60%；县镇高中80%，初中30%。我们认为，机器的达标可以突击，但是与计算机进入课堂相伴随的观念更新以及教学软件的设计开发、教学形式和教学方法的改变等则是难以在短期内完成的，而且其中还有许多问题需要研究。如：计算机能否代替教师？教师的作用将如何发挥？数学 CAI 会不会削弱学生的数学能力？那种必须通

过人际交往才能获得的非智力因素如何培养?等等。我们认为，计算机不能代替教师，但是可以使计算机为教师做更多的事情。典型的例子就是利用计算机可以把几何图形、函数图象作得形象、生动、直观、准确，使学生能够更加清晰地感受到几何元素之间的关系，清楚地看到函数变化的基本过程。但是，这仍然是表面的。我们估计，数学CAI必然向智能化发展，计算机将不再只是一个电子黑板。对学生数学学习心理有充分理解的教师，将可以利用自己的教学理论和实践经验，结合计算机技术设计出富有启发性的教学情境，使学生主动投入学习，通过自己的试验、探索，理解和掌握知识。因此，能够体现数学过程性的CAI软件，将使教师的主导地位更加突出：如何使CAI自然地融入教学过程；如何组织教材，使之更适应于计算机的要求，并根据不同内容设计出教学软件（需要教师具有更大的创造性）；如何组织CAI的课堂教学(引进计算机的课堂与传统课堂是不一样的)；如何指导学生（除计算机操作外，让学生理解CAI程序的意图是难点和关键）等，都需要教师的创造性工作。而学生也会获得更大的自由，因为有了CAI，教学的个别化将成为现实。

CAI进入课堂，必然会使教学内容产生变革。一方面是计算机语言、编程的内容进入教材，另一方面是计算机知识渗透到数学内容中。总之，计算机知识与数学内容的结合是一个值得研究的课题。

就目前的情况来说，普及数学CAI的难点主要有两个：一是教师的计算机知识问题，特别是对各种教学软件的特性的了解问题。因为对于不同的数学内容应该选择不同的软件，如果对软件的性能不了解的话，这种选择就不可能是最合适的。从某种意义上说，现在教师的计算机知识没有学生丰富。二是教学软件的开发。现在的教学软件大部分是由软件开发商制作的，缺乏必要的数学教学、数学学习心理的理论指导，仍然停留在行为主义、程序教

学的层次上。显然，这种软件对于数学这样需要通过主体自主活动、独立理解后才能掌握的内容，显得有些力不从心。我们认为，数学 CAI 软件必须由数学教师来开发，因为只有融合了学习心理、教学理论和丰富教学经验的教学软件，才能真正体现 CAI 的精神实质。而这又需要数学教师懂得计算机编程。这样，体现 CAI 精神实质的软件设计将是今后一个非常重要的课题。在软件的设计中，不但要考虑如何体现数学知识的发生和发展过程，还要考虑学生的认知特点，如何解决非智力因素的培养及发挥非智力因素的作用问题。

数学教育研究中存在的问题很多，以上所谈也只是挂一漏万。愿我们大家携起手来，共同迎接新时代的挑战，为振兴和繁荣数学教育作出我们自己的贡献。

后　记

结束本书的写作之时，重读书稿后发现，贯穿其中的一条主线是：在培养学生的创造性思维和创造精神这一数学教育的核心目标下，数学教学要强调学生的主体活动，使学生有机会通过自主活动、主动而积极的思考来获得知识、培养能力、发展智力。为此，在教学指导思想上应当牢固树立启发式教学思想，在研究学生的数学学习规律的前提下，通过分析数学知识结构、学生已有的数学认知结构及其相互关系后，设计和安排出相应的教学情境。教学情境应该既体现数学理论的发生发展过程（包括数学的似真性、可变性等），又符合学生的数学思维规律（包括思维过程中的猜测、直观描述、观察、检验、放弃、形成假设、演绎推理、一般化等），以利于学生在数学学习共同体中开展各种有效的数学活动。教学过程中，应该重视基本概念、基础知识的理解和掌握，要强调数学活动的过程性和思想性，要强调数学知识之间的联系性、数学知识与日常生活之间的联系性。

我们感到，数学教育研究需要有更多的理解、更大的投入。由于历史和现实、观念和实践等方面的原因，数学教育虽然在教育（包括基础教育和高等教育）整体中占有举足轻重的地位，数学教育改革的成败关系到整个中华民族的兴衰存亡，但仍然遇到方方面面的困扰，有人甚至认为应该精简甚至取消高等学校的数学教育课程。就目前的数学教育研究现状来说，理论研究有待深入、与实践的结合需要加强，这是任何一门发展中的学科都要面临的问

题，但是这绝对不能成为否定数学教育理论研究意义的根据。我们需要的是理解、支持、合作，而不是不负责任的指责、否定。如果有大量的“盟军”（如数学家、广大数学教师等）的协同作战，数学教育研究就会有更加迅速的进展。

另一方面，数学教育研究需要有更加广阔的视野。过去比较多的是向国外学习，这是需要的。但是这种学习绝不能走向极端——国外的一切都是好的。我们认为，向国外学习一定要立足于中国国情，坚持和发扬中国的优秀文化传统，这是我们所说的“开阔视野”的真正涵义。事实上，关于学习与教学，中国历史上有许多精辟的论述。例如，关于教学，我国古代教育家认为，[①]教学过程可分为“博学之，审问之，慎思之，明辨之，笃行之”五个步骤；教学上应该遵循下列原则：（1）要端正学生的学习态度（“知之为知之，不知为不知”）；（2）及时施教（“当其可之谓时”）；（3）由博返约（“博学于文，约之以礼”）；（4）学思结合（“学而不思则罔，思而不学则殆”）（5）启发式教学（“不愤不悱，不悱不发。举一隅不以三隅反则不复也”，《学记》中说，“君子之教，喻也。道而弗牵，强而弗抑，开而弗达。道而弗牵则和，强而弗抑则易，开而弗达则思。和、易、以思，可谓善喻矣。”）；（6）循序渐进（“循循然善诱人”）；（7）因材施教（《学记》中说，“学者有四失，教者必知之。人之学也，或失则多，或失则寡，或失则易，或失则止。此四者，心之莫同也。知其心，然后能救其失也。教也者，长善而救其失者也。”）（8）兴趣与努力相结合；（9）温故知新（“温故而知新，可以为师矣。”）；（10）教学相长（“学然后知不足，教然后知困。知不足，然后能自反也；知困，然后能自强也。故曰：教学相长也。”）；（11）知行结合（“不闻不若闻之，闻之不若见之，见之不若知之，知之不若行之，学至于行之而止矣”）；

---

① 瞿葆奎，主编.教育学文集·教学（上册），307

（12）亲师乐友。关于学习，我国古代教育家认为，[1]应该做到：（1）立志，这是学习的动力；（2）乐学（“知之者不如好之者，好之者不如乐之者。”）；（3）博识（即要有广博深厚的知识基础）；（4）知止（即要有一个明确的学习方向与目标）；（5）慎思（即要善于思考，要把“学”和“思”结合起来）；（6）持恒（即学习要坚持不懈，要持之以恒，要锲而不舍）。比较现代各国关于学与教的各种理论，上述论述不仅毫不逊色，而且是有过之而无不及。国际上的有关研究也表明，深受中国传统文化影响的东方文化在教育上具有独特优势。所以，坚持和发扬我国优秀的文化传统，对于建设具有中国特色的数学教育理论有着非常重要和积极的意义。为了使我国的数学教育研究有一个大的发展，我们应该重视研究中国传统文化对数学教育的影响。

从国际上看，数学教育的重要性已经被提到了一个前所未有的高度，这是人类社会向知识经济时代过渡的必然要求。人人都得到高水平的数学教育，人人都具有高水平的数学素质，已经成为当今世界各国共同的教育目标。因此，数学教育研究不仅重要，而且前途光明。

在本书稿的修改过程中，曹才翰先生不幸逝世。先生一生为我国的中小学数学教育事业呕心沥血，他是在1999年10月3日凌晨去世的，而在10月2日晚上还与来访者讨论我国数学教育改革的问题。

曹先生具有深厚的数学教育理论功底，学识渊博，是全国数学教育界公认的我国数学教育学的创立者和学术带头人之一，为我国数学教育的建立与发展做出了卓越贡献，在数学教育界享有盛誉，具有极大的社会影响。他实事求是，坚持一切从实际出发，用科学的马克思主义辩证唯物论和历史唯物论指导自己的理论与

① 瞿葆奎，主编.教育学文集·教学（上册），322

实践；他强调既要坚持中国数学教育的优秀传统、肯定中国数学教育的巨大成就，又要吸收和借鉴国外数学教育的先进理论和经验，走一条符合中国具体国情的、具有中国特色的数学教育研究与发展之路，为我国数学教育改革指明了正确的发展方向。

曹先生从事数学教育工作40余年，发表论文近70篇，教材、专著10余本，其中《数学教育学概论》是我国数学教育学的奠基性理论专著，因其开创性地提出了建立数学教育学新体系的思路而荣获国家教委教育科学优秀成果一等奖，同时该书获全国教育理论著作优秀奖；《中学数学教育概论》获中国教育学会优秀专著奖。他将毕生精力奉献给了自己所热爱的祖国教育事业，为数学学科教学论研究生培养做了奠基性工作，为国家培养了大批优秀的数学教育高级专门人才。他还参与了我国《九年制义务教育全日制中学数学教学大纲》的起草工作。在长期的教学实践中，他积累了丰富的教学经验，教学效果极佳。我坚信，他为我国数学教育事业所做出的不可磨灭的贡献将载入我国数学教育史册。

本书成为他与我合作的最后一本著作。由于先生身体状况一直不佳，在先生确定好写作思想及提纲以后，文字工作由我完成。在写作过程中，由于没能完全领会先生的思想，因此本书的写作曾经几易其稿，根据先生提出的意见进行了反复修改，但直到现在我仍然感到还没有很好体现先生的思想。先生已乘仙鹤而去，我再也没有机会向先生讨教，本书也只能以不成熟的面貌出现在读者的面前。恳望读者能提出宝贵的意见。

曹先生一生光明磊落，襟怀坦荡，顾全大局，高风亮节，表现了高尚的道德情操；为人正直，办事公道，严于律己，平易近人，提携后生，是一位受人敬重和爱戴的长者。对学生，他既是严师又是父母，是学生为人的榜样、治学的风范；对工作，他呕心沥血，任劳任怨，是“学为人师，行为世范”的楷模。我想，唯有像先生那样，竭尽全力地为我国数学教育事业而努力工作，才能

告慰先生，不负先生的培养之恩。

章建跃

1999年10月

参考文献

1. 林崇德. 学习与发展. 北京：北京教育出版社，1992
2. 冯忠良. 结构化与定向化教学心理学原理. 北京：北京师范大学出版社，1998
3. 施良方. 学习论·学习心理学的理论与原理. 北京：人民教育出版社，1994
4. [美] 奥苏伯尔 D P. 教育心理学——认知观点. 余星南 宋 钧译，北京：人民教育出版社，1994
5. [苏] 赞科夫. 教学与发展. 北京：文化教育出版社，1980
6. [美] 加涅 R M. 学习的条件. 傅统先，陆有铨译. 北京：人民教育出版社，1985
7. 布鲁纳. 布鲁纳教育论著选. 邵瑞珍，张渭城，译. 北京：人民教育出版社，1989
8. [瑞士] 皮亚杰 J. 发生认识论原理. 北京：商务印书馆，1989
9. [瑞士] 皮亚杰 J. 心理学与认识论. 天津：求实出版社，1988
10. [美] 布卢姆 B S. 等. 教育评价. 上海：华东师范大学出版社，1987
11. 邵瑞珍，等. 教育心理学. 上海：上海教育出版社，1989
12. 朱智贤，林崇德. 思维发展心理学. 北京：北京师范大学出版社，1986
13. 高觉敷. 西方近代心理学史. 北京：人民教育出版社，1982
14. 林崇德，辛涛. 智力的培养. 杭州：浙江人民出版社，1996
15. 皮连生. 智育心理学. 北京：人民教育出版社，1996
16. 俞国良. 创造力心理学. 杭州：浙江人民出版社，1996
17. 陈英和. 认知发展心理学. 杭州：浙江人民出版社，1996
18. 瞿葆奎. 教育学文集 教学（上、中、下）. 北京：人民教育出

版社，1988
19. 瞿葆奎. 教育学文集.智育. 北京：人民教育出版社，1988
20. 瞿葆奎. 教育学文集.教育与人的发展. 北京：人民教育出版社，1988
21. [苏]斯米尔诺夫 A A. 苏联心理科学的发展与现状. 北京：人民教育出版社，1984
22. 李伯黍等. 教育心理学. 上海：华东师范大学出版社，1995
23. [德] 韦特海默. 创造性思维. 林宗基译. 北京：教育科学出版社，1987
24. 陈其弼，周丽华. 卢仲衡教育心理学论文集. 北京：地质出版社，1997
25. [美]安德森 J R. 认知心理学. 杨清，张述祖，等译. 长春：吉林教育出版社，1989
26. 王苏，汪安圣. 认知心理学. 北京：北京大学出版社，1992
27. [美] 拉宾诺威克兹 A. 皮亚杰学说入门 思维 学习 教学. 杭生译. 北京：人民教育出版社，1987
28. 张庆林. 当代认知心理学在教学中的应用. 重庆：西南师范大学出版社，1995
29. 张庆林. 元认知的发展与主体教育. 重庆：西南师范大学出版社，1997
30. 顾明远. 素质教育的理论探讨. 北京：中国和平出版社，1996
31. 陈琦，刘儒德. 当代教育心理学. 北京：北京师范大学出版社，1997
32. 吴季松. 知识经济. 北京：北京科学技术出版社，1998
33. [美] 卡尔文 W. 大脑如何思维. 杨雄里，梁培基译. 上海：上海科学技术出版社，1996
34. 燕国材. 学习心理学. 北京：警官教育出版社，1998
35. [新西兰] 德莱顿 G，等. 学习的革命. 顾瑞荣等译. 上海：上

海三联书店，1997

36. 熊川武. 学习策略论. 南昌：江西教育出版社，1997

37. 丁尔升，主编. 现代数学课程论. 南京：江苏教育出版社，1997

38. 邓东皋等. 数学与文化. 北京：北京大学出版社，1990

39. [美] 波利亚 G. 数学的发现. 刘远图，秦 璋译. 北京：科学出版社，1987

40. [美] 波利亚 G. 数学与猜想. 李心灿等译. 北京：科学出版社，1985

41. [美] 波利亚 G. 怎样解题. 阎育苏译. 北京：科学出版社，1982

42. 曹才翰. 中学数学教学概论. 北京：北京师范大学出版社，1990

43. 曹才翰，章建跃. 初中数学课堂教学结构. 长沙：湖南教育出版社，1996

44. [苏] 斯托利亚尔 A A. 数学教育学. 丁尔升等译. 北京：人民教育出版社，1985

45. [荷兰] 弗赖登塔尔. 作为教育任务的数学. 陈昌平等译. 上海：上海教育出版社，1995

46. [美] 克莱因 M. 古今数学思想. 上海：上海科学技术出版社，1979

47. 发达国家中小学数学教学大纲（一）. 国际数学课程教材比较课题组译. 北京：人民教育出版社，1994

48. [英] 科克罗夫特 W H. 数学算数——英国学校数学教育调查委员会报告. 范良火译. 北京：人民教育出版社，1994

49. 青浦县数学教改实验小组. 学会教学. 北京：人民教育出版社，1991

50. 郑毓信. 数学哲学新论. 南京：江苏教育出版社，1990

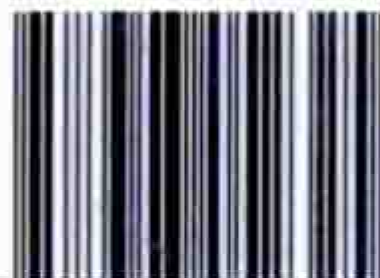
51. [美] 美国国家研究委员会. 人人关心 数学教育的未来. 方企勤等译. 北京：世界图书出版公司，1993

52. 郑毓信. 数学方法论. 南宁：广西教育出版社，1995
53. 钟善基，主编. 中国著名特级教师教学思想录. 中学数学卷. 南京：江苏教育出版社，1996
54. 严士健，主编. 面向21世纪的中国数学教育. 南京：江苏教育出版社，1996
55. 编写组. 数学教育学导论. 北京：高等教育出版社，1992
56. 中国教育学会数学教育研究会. 中学数学教育论文选编. 长沙：湖南教育出版社，1991
57. 中国教育学会中学数学教学专业委员会. 面向21世纪的数学教育. 杭州：浙江教育出版社，1997
58. 丁尔升，主编. 中学百科全书. 数学卷. 北京：北京师范大学出版社等，1994
59. 王梓坤. 今日数学及其应用. 数学通报，1994（7）
60. 徐利治，郑毓信. 现代数学教育工作者值得重视的几个概念. 数学通报，1995（9）
61. 武欣，张厚粲. 创造力研究的新进展. 北京师范大学学报（社会科学版），1997（1）
62. 郑毓信，等. "建构学说"笔谈. 数学教育学报，1994，3（1）

数学教育心理学

数学思想方法与中学数学

问题解决的数学模型方法



ISBN 7-303-05232-1/O · 230

定价：12.00元